ОГЛАВЛЕНІЕ II-го ТОМА.

Во 2-й томъ „Трудовъ 1-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики“, вошли доклады, сдѣланные въ секціяхъ. Президіумъ секцій составляли слѣдующія лица: 1-й (учебная литература) – *М. Г. Попруженко, Б. Б. Піотровскій, Б. В. Грибовскій* и *Н. Н. Зубковскій*; 2-й (программы и экзамены)—проф. *С. Г. Петровичъ* и *Н. А. Самохваловъ*; 3-ей (методика преподаванія): – *С. И. Шохоръ-Троцкій, В. А. Кройгусъ, А. Е. Дувина, К. Н. Зрене, А. Н. Лаврентьева* и *С. Р. Соколовскій*; 4-й (техническія училища)—*М. Л. Франкъ* и *Е. Н. Полушкинъ*; 5-й (коммерческія училища) — проф. *Н. А. Некрасовъ, А. Ѳ. Гатлихъ* и *В. Н. Литвинскій*. Матеріалъ для 2-го тома разработанъ президіумомъ секцій.

Въ приложеніи помѣщены: алфавитный списокъ лицъ, выступавшихъ въ собраніяхъ секцій; алфавитный списокъ членовъ Съѣзда; перечень вошедшихъ въ оба тома докладовъ, сгруппированныхъ по категоріямъ примѣнительно къ программѣ Съѣзда (§ 4-й Положенія).

Денежный отчетъ по Съѣзду будетъ данъ по полученіи наложенныхъ на 2-й томъ платежей. Тогда же выяснится, возможно-ли выпустить прибавленіе ко 2-му тому, заключающее обозрѣніе выставки, состоявшейся при Съѣздѣ, и доклады, допущенные организаціоннымъ Комитетомъ на Съѣздъ, но, по разнымъ причинамъ, оставшіеся не прочитанными.

З. Макшеевъ.

Іюнь, 1913.

1-я секція.

Учебная литература по математикѣ.

Предсѣдатель секціи: М. Г. Попруженко.

Товарищъ предсѣдателя: Б. Б. Піотровскій.

Секретари: Б. В. Грибовскій и П. И. Зубковскій.

Организаціоннымъ Комитетомъ Съѣзда были объявлены въ программѣ Съѣзда слѣдующіе доклады къ заслушанію въ 1-ой секціи:

1) *И. А. Извольскій* (Москва). «Современное состояніе курса геометріи въ связи съ обзоромъ наиболѣе распространенныхъ учебниковъ».

2) *А. Р. Кулишеръ* (Спб.). «Обзоръ современной учебной литературы по геометріи».

3) *Б. Б. Піотровскій* (Спб.). «Обзоръ современной учебной литературы по алгебрѣ».

4) *В. Х. Майдель* (Спб.). «Обзоръ современной учебной литературы по ариѳметикѣ» (общіе курсы).

Трудъ по обзору литературы по ариѳметикѣ былъ раздѣленъ между В. Х. Майделемъ и Л. Н. Тяпкиной, поэтому въ журналѣ засѣданій секціи вслѣдъ за докладомъ В. Х. Майделя приводится и докладъ Л. Н. Тяпкиной, хотя она своего доклада въ засѣданіи и не читала.

5) *В. Р. Мрочекъ* (Спб.). «Обзоръ современной литературы на русскомъ языкѣ по методикѣ ариѳметики».

*) 6) *Я. В. Іодынскій* (Спб.). «Обзоръ современной учебной литературы по ариѳметикѣ (курсы теоретической ариѳметики, для старшихъ классовъ) и по тригонометріи».

*) 7) *В. І. Шиффъ* (Спб.). «Обзоръ современной учебной литературы по аналитической геометріи».

*) 8) *Р. Д. Пономаревъ* (Харьковъ). «Объ организаціи педагогическихъ библіотекъ по математикѣ и о педагогической библіотекѣ Харьковскаго математическаго общества».

*) 9) *Д. М. Синцовъ, проф.* (Харьковъ). «О Харьковской математической библіотекѣ».

10) *И. Н. Володкевичъ* (Кіевъ). «О реальномъ направленіи преподаванія математики въ связи съ жизненными фактами».

Въ выше приведенномъ перечнѣ докладовъ отмѣчены звѣздочкой тѣ изъ нихъ, которые не состоялись.

Сверхъ докладовъ, объявленныхъ въ программѣ съѣзда, секціей были заслушаны:

1) Сообщеніе А. В. Годнева (Симбирскъ) о составленномъ имъ курсѣ геометріи.

2) Заявленіе Л. А. Сельскаго о составленномъ имъ задачникѣ по ариѳметикѣ—это заявленіе было заслушано въ связи съ преніями по докладу И. Н. Володкевича «О реальномъ направленіи преподаванія математики въ связи съ жизненными фактами».

3) Докладъ В. А. Соколова (Майкопъ, Кубанской обл.). «Обоснованіе ариѳметическихъ дѣйствій».

Секція имѣла три засѣданія: 28-го, 30-го декабря и 2-го января.

Доклады, посвященные обзору учебной литературы по тому или иному изъ отдѣловъ курса математики средней школы, носили по преимуществу информаціонный характеръ; докладчики не входили въ детальный разборъ учебниковъ и ихъ критику, отмѣчая лишь, главнымъ образомъ, тѣ или иныя направленія въ современной литературѣ и указывая ихъ представителей; поэтому эти доклады и не вызывали преній, хотя

по поводу нѣкоторыхъ изъ нихъ членами съѣзда были высказаны замѣчанія и дополненія. Наиболѣе оживленныя преція были вызваны докладами И. А. Извольскаго и Н. Н. Володкевича и сообщеніемъ А. В. Годнева.

Въ первомъ своемъ засѣданіи секція, по предложенію предсѣдателя, почтила вставаніемъ память покойнаго А. И. Гольденберга, какъ выдающагося работника въ русской учебной математической литературѣ. Предсѣдателемъ секціи былъ возбужденъ вопросъ о математической хрестоматіи и было предложено желающимъ членамъ секціи образовать особое совѣщаніе, посвященное болѣе детальному обсужденію этого вопроса, но, несмотря на весьма сочувственное отношеніе секціи къ вопросу о математической хрестоматіи, совѣщаніе это не состоялось, вѣроятно, за недостаткомъ времени и обремененностью работой членовъ Съѣзда.

Подводя итогъ работы секціи, можно указать, что эта работа отразилась на слѣдующихъ резолюціяхъ, принятыхъ въ общемъ собраніи Съѣзда 3-го января.

«Съѣздъ признаетъ своевременнымъ опустить изъ курса математики средней школы нѣкоторые вопросы второстепеннаго значенія, провести черезъ курсъ и ярко освѣтить идею функціональной зависимости, а также—въ цѣляхъ сближенія преподаванія въ средней школѣ съ требованіями современной науки и жизни—ознакомить учащихся съ простѣйшими и несомнѣнно доступными имъ идеями аналитической геометріи и анализа».

«Съѣздъ признаетъ крайне желательнымъ, чтобы авторы настоящихъ и будущихъ учебниковъ приняли во вниманіе точки зрѣнія, изложенныя въ предыдущемъ пунктѣ настоящихъ резолюцій. Въ частности признается желательнымъ выработка задачниковъ, соотвѣтствующихъ кругу интересовъ учащихся на каждой ступени ихъ обученія и включающихъ въ себя данныя изъ физики, космографіи, механики и пр., а также составленіе математической хрестоматіи, дополняющей и углубляющей свѣдѣнія, выносимыя учащимися изъ обязательной программы».

«Въ цѣляхъ повышенія спеціальнаго и педагогическаго самообразованія преподавателей желательно, чтобы библіотеки учебныхъ заведеній были въ полной мѣрѣ снабжены необходимыми учеными, учебными, методическими сочиненіями, справочными изданіями и журналами».

«Съѣздъ признаетъ желательнымъ, чтобы педагогическимъ совѣтамъ учебныхъ заведеній было предоставлено больше самостоятельности въ дѣлѣ распредѣленія учебнаго матеріала по классамъ и въ выборѣ учебныхъ руководствъ».

Первое засѣданіе.

28 декабря 8 ч. вечера.

Предсѣдательствовалъ М. Г. Попруженко.

При открытіи Собранія, предсѣдателемъ было заявлено, что секція не ставила своей цѣлью дать подробный разборъ и оцѣнку учебниковъ; точно также не имѣлось въ виду выносить резолюцій относительно пригодности каждаго изъ нихъ. Докладчикамъ было поручено ознакомить интересующихся съ содержаніемъ различныхъ учебниковъ и отмѣтить ихъ главнѣйшія особенности. Критиковать учебники не предполагалось; но возможно, что попутно будутъ сдѣланы и указанія на недочеты. Докладчики имѣли въ виду, главнымъ образомъ, новѣйшую учебную литературу; исчерпать же весь перечень существующихъ учебниковъ не могли изъ за недостатка времени.

Послѣ этого заявленія, предсѣдателемъ былъ возбужденъ вопросъ о математической хрестоматіи.

Предсѣдатель. «Среди различныхъ группъ педагоговъ уже давно возбуждался вопросъ о математической хрестоматіи, т.-е.. о такой книгѣ, которая предназначена для самостоятельной работы учениковъ, съ цѣлью углубленія и расширенія ихъ математическихъ знаній, сообщенія историческихъ и философскихъ элементовъ, ознакомленія съ математическими первоисточниками и пр. Первая мысль о такой хрестоматіи возникла послѣ смерти незабвеннаго А. И. Гольденберга въ связи съ желаніемъ использовать для этой хрестоматіи статьи «Математическаго Листка», издававшагося покойнымъ педагогомъ

Затѣмъ мысль объ этой хрестоматіи подвергалась различнымъ эволюціямъ, и теперь она предлается вашему обсужденію безъ всякаго предрѣшенія вопроса о томъ, въ какой формѣ реализуется ея осуществленіе».

Собраніе просило внести вопросъ о хрестоматіи въ Организаціонный Комитетъ Съѣзда *).

Затѣмъ, въ краткихъ, но теплыхъ выраженіяхъ помянулъ предсѣдатель педагогическую дѣятельность умершаго А. И. Гольденберга, и Собраніе почтило память умершаго педагога вставаніемъ.

Прочитано письмо проф. Императорскаго Университета Св. Владиміра И. М. Бубнова, въ которомъ онъ шлетъ привѣтствіе Съѣзду и предлаетъ безплатно желающимъ членамъ Съѣзда 100 экземляровъ подготовляемаго имъ къ печати труда: «Древній Абакъ—колыбель современной ариѳметики». Профессоръ въ новомъ своемъ трудѣ, представляющемъ переработку вышедшей въ свѣтъ въ 1911 г. его книги «Подлинное сочиненіе Гербарта объ Абакѣ», предполагаетъ опустить нѣкоторыя филологическія изысканія, мало интересующія математиковъ по спеціальности, а остановиться, главнымъ образомъ, на систематическомъ изложеніи Абака и на численныхъ примѣрахъ.

Предложено членамъ Съѣзда, желающимъ получить подготовляемый къ печати трудъ проф. Бубнова, записаться на особомъ листѣ съ указаніемъ своего адреса. За пересылку будетъ наложенъ платежъ.

Послѣ оглашенія этого письма, по просьбѣ участника собранія В. Я. Гебеля, ему было предоставлено слово объ умершемъ А. И. Гольденбергѣ.

В. Я. Гебель (Москва). «На приглашеніе г-на предсѣдателя собранія вамъ угодно было почтить память покойнаго А. И. Гольденберга. Я имѣлъ счастье знать этого замѣчательнаго педагога въ послѣдніе годы его жизни, поэтому считаю своимъ долгомъ подѣлиться съ вами своими воспоминаніями. Представьте себѣ сѣдого худощаваго человѣка со слѣ-

*) См. Резолюціи Съѣзда.

Прим. Ред.

дами болѣзненности на утомленномъ лицѣ, но съ быстро загорающимися живыми глазами, со страстной нервной рѣчью на устахъ, когда дѣло шло о дѣлѣ, которому онъ отдалъ свою жизнь и свой талантъ, когда дѣло шло о математикѣ.

Таковъ былъ А. И. Гольденбергъ въ послѣдніе годы своей жизни. Артиллеристъ по образованію, онъ доказалъ своею жизнью и дѣятельностью, что не спеціальное или профессіональное образованіе, а горячая любовь и призваніе къ наукѣ и преподаванію—создаютъ истиннаго педагога. Велика была его работа, велика была и его скромность. Въ журналѣ, о которомъ упомянулъ г. предсѣдатель, въ «Математическомъ Листкѣ», созданномъ А. И. Гольденбергомъ и представлявшемъ первый въ Россіи журналъ для преподавателей и любителей элементарной математики, большая часть статей была написана имъ безъ всякой подписи.

Въ послѣдніе годы, со всѣмъ рвеніемъ своей пылкой натуры, онъ отдался интересамъ преподаванія математики въ начальной народной школѣ, ведя руководящія бесѣды на педагогическихъ съѣздахъ для народныхъ учителей. Даже въ послѣднемъ предсмертномъ бреду онъ говорилъ о палочкахъ, прутикахъ, соломинкахъ (наглядныхъ пособіяхъ по счету). Мы *исполнили только свой долгъ, почтивъ память такого самоотверженнаго, славнаго педагога»!*

I. Обзоръ современной учебной литературы по алгебрѣ.

Докладъ Б. В. Піотровскаго (Спб.).

«Въ настоящемъ докладѣ не имѣется въ виду дать исчерпывающій обзоръ всѣхъ современныхъ руководствъ и пособій по предмету алгебры. Цѣль доклада — отмѣтить лишь различныя направленія въ литературѣ этого предмета и кратко характеризовать ихъ представителей; при этомъ прежде всего приходится обратить вниманіе на то новое направленіе въ преподаваніи математики, которое въ теченіе послѣднихъ 10—15 лѣтъ наблюдается въ Западной Европѣ и успѣло уже вылиться въ конкретныя формы во французскихъ учебникахъ Бореля, Бурле, Таннери и другихъ, составленныхъ согласно новымъ программамъ 1902 и 1905 г.г., а также въ нѣкоторыхъ нѣмецкихъ руководствахъ, составленныхъ въ духѣ идей, представителями которыхъ являются Феликсъ Клейнъ и составители Меранскаго плана. Не входя въ подробную характеристику этого новаго направленія, которое уже находитъ откликъ и въ русской педагогической мысли, напомнимъ лишь его существенныя черты:

1) Содержаніе курса и методы изложенія должны быть на различныхъ ступеняхъ обученія согласованы съ психологіей возраста учащихся. Вслѣдствіе этого, на первыхъ ступеняхъ обученія признаются неумѣстными отвлеченность и строго дедуктивные методы изложенія; наглядности, въ нѣкоторыхъ случаяхъ непосредственному усмотрѣнію и эксперименту (лабораторный методъ) отводится видное мѣсто. Изъ этого же требованія вытекаетъ желательность концентрическаго расположенія матеріала въ общемъ планѣ курса математики средней школы — при этомъ въ послѣднемъ концентрѣ найдетъ себѣ

мѣсто и логическiй элементъ съ болѣе или менѣе строгимъ обоснованiемъ курса.

2) Содержанiе курса математики должно быть обновлено, какъ въ соотвѣтствiи съ современнымъ содержанiемъ науки, такъ и въ соотвѣтствiи съ требованiями жизни и практическихъ приложенiй, поэтому и въ курсѣ алгебры должны занять подобающее имъ мѣсто, *идея перемѣннаго числа, понятiе о функцiи* и *изученiе процесса измѣненiя простѣйшихъ алгебраическихъ функцiй*—причемъ *графическому методу изображенiя функцiональной зависимости* должно быть дано широкое развитiе.

3) Различные отдѣлы школьнаго курса математики должны быть по возможности сближены другъ съ другомъ. То же самое желательно по отношенiю къ курсу математики, съ одной стороны и къ курсамъ: физики, космографiи, химiи, естествознанiя, статистики — съ другой стороны.

Въ предлагаемомъ обзорѣ учебной литературы по алгебрѣ мы будемъ различать двѣ группы учебныхъ руководствъ: 1) тѣ руководства, на которыхъ не отразилось вышеуказанное направленiе, 2) тѣ руководства, авторы которыхъ въ той или другой степени считались съ этимъ направленiемъ—будемъ въ дальнѣйшемъ называть его «реформистское» направленiе.

I-ая группа руководствъ. Представителями этой группы мы считаемъ учебники: Давидова, Пржевальскаго, Шапошникова и Киселева (въ первыхъ двадцати двухъ изданiяхъ).

Учебникъ Давидова долгое время являлся наиболѣе распространеннымъ въ нашей средней школѣ руководствомъ и слишкомъ хорошо всѣмъ извѣстенъ. Въ смѣнившемъ его *учебникѣ Киселева* мы видимъ стремленiе въ большей степени удовлетворить современнымъ научнымъ требованiямъ въ смыслѣ общности и строгости изложенiя нѣкоторыхъ вопросовъ—изложенiю этихъ вопросовъ (напр. вопросъ объ отрицательныхъ числахъ) приданъ *формальный* характеръ—въ духѣ изложенiя Бертрана. Считаемъ необходимымъ оговориться, что мы въ настоящемъ докладѣ не имѣемъ въ виду разсмотрѣнiя вопроса, насколько такое изложенiе умѣстно въ курсѣ средней школы

и насколько это изложеніе удачно проведено въ курсѣ А. П. Киселева съ научной и логической точекъ зрѣнія.

Въ *учебникѣ алгебры Н. А. Шапошникова* (проф. Московскаго Императорскаго Техническаго Училища), авторъ тоже имѣетъ въ виду дать болѣе или менѣе строгое изложеніе курса, но при этомъ, кромѣ формальныхъ доказательствъ при изложеніи вопроса, онъ обращается къ болѣе глубокому, исчерпывающему разсмотрѣнію, какъ самого вопроса по существу, такъ и способа доказательствъ. Въ этомъ отношеніи заслуживаютъ вниманія преподавателя, напримѣръ, слѣдующія статьи: понятіе объ алгебраическомъ количествѣ (числа абсолютныя и относительныя); выраженія положительныя и отрицательныя (по формѣ); особый случай умноженія двучленовъ (обращено вниманіе на способъ доказательства—методъ математической индукціи); особый случай дѣленія многочлена на двучленъ (обращено вниманіе на способъ доказательства — дедукція); общая теорія равенства (статья о равносильности уравненій); ирраціональныя числа; уравненія высшихъ степеней; общая теорія логариѳмовъ (дается понятіе о перемѣнномъ числѣ, функціи и непрерывности). Кромѣ того, укажемъ еще на тѣ статьи, которыя приведены въ учебникѣ, но не входятъ въ составъ оффиціальныхъ программъ: способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, наибольшія и наименьшія значенія трехчлена второй степени, общія теоремы о рядахъ, распространеніе формулы бинома Ньютона, предѣлы нѣкоторыхъ показательныхъ выраженій (число e), разложеніе показательной функціи и логариѳма въ ряды.

Мы и здѣсь не будемъ входить въ разсмотрѣніе достоинствъ и недостатковъ въ постановкѣ и изложеніи различныхъ отдѣловъ курса Н. А. Шапошникова, отмѣтимъ лишь, что во многихъ вопросахъ требованія дѣйствительнаго логическаго обоснованія и доказательства не удовлетворены, при отсутствіи въ то же время достаточной конкретизаціи. Обратимъ, напримѣръ, вниманіе на статью объ ирраціональныхъ числахъ: авторъ, опредѣливъ несоизмѣримое число, какъ такое, «которое не можетъ быть точно выражено ни въ единицахъ, ни въ какихъ доляхъ единицы», приводитъ статью: «вычисленіе ирра-

ціональныхъ чиселъ» и затѣмъ говоритъ: «разсужденія о вы числеціи ирраціональныхъ чиселъ устанавливаютъ особы взглядъ на эти числа, какъ на неизмѣнные предѣлы, къ кото рымъ безконечно приближаются перемѣнныя соизмѣримы числа соотвѣтствующихъ видовъ». Войдя далѣе въ болѣе и менѣе подробное разсмотрѣніе понятія о предѣлѣ перемѣнна числа, авторъ устанавливаетъ дѣйствія надъ ирраціональным числами, исходя изъ теоріи предѣловъ. Такое изложеніе в проса не выдерживаетъ критики съ логической точки зрѣнія вѣдь для того, чтобы имѣть право утверждать: ирраціонал ное число A есть предѣлъ перемѣннаго раціональнаго x, на имѣть возможность показать, что $(A-x)$ можетъ быть сдѣлан какъ угодно мало; слѣдовательно, понятіе о разности A должно предшествовать утвержденію: $A=$ пред. (x), а не н оборотъ.

Курсъ элементарной алгебры Пржевальскаго по общем характеру курса довольно близокъ къ курсу Шапошнико содержитъ въ текстѣ значительное количество упражненій примѣровъ.

II-я группа учебниковъ. Къ этой группѣ мы относи руководства: Глаголева, Лебединцева, Левитуса и Киселе въ двадцать третьемъ изданіи, вмѣстѣ съ дополняющей статьей «Графическое изображеніе нѣкоторыхъ функцій, ра сматриваемыхъ въ элементарной алгебрѣ» — эта статья изда отдѣльной брошюрой въ 50 страницъ.

Въ этихъ руководствахъ, какъ мы сказали, читатель на детъ отраженіе тѣхъ взглядовъ на содержаніе и методъ изл женія школьнаго курса алгебры, которые мы выше назва «реформистскими». Обращаясь къ краткой характеристи каждаго изъ перечисленныхъ учебниковъ, мы укажемъ, какой степени указанные взгляды на данномъ учебникѣ отр зились, какая изъ сторонъ реформистскаго направленія пол чила въ немъ наибольшее развитіе, и вліяніе какихъ иностра ныхъ авторовъ на немъ наиболѣе сказалось — если такое вл ніе имѣло мѣсто.

1) *Глаголевъ.* Элементарная алгебра; части I и

Разнообразный, обширный матеріалъ, изложенный

восьмистахъ страницахъ. Отличительная черта—авторъ включилъ въ свой курсъ всѣ тѣ вопросы, которые признаются необходимыми въ курсѣ съ точки зрѣнія реформистовъ, изложилъ ихъ достаточно полно и обоснованно и въ то же время не поступился ни одной изъ статей традиціоннаго курса алгебры, разработавъ изложеніе нѣкоторыхъ изъ нихъ нѣсколько иначе, чѣмъ это обычно дѣлалось. Изложеніе теоріи сопровождается многочисленными примѣрами и задачами, представляющими интересъ, какъ въ смыслѣ освѣщенія и усвоенія теоретическихъ вопросовъ, такъ и въ смыслѣ практическихъ приложеній.

Чтобы дать понятіе о содержаніи и характерѣ этого курса, отмѣтимъ слѣдующее:

1) Статья: «алгебраическія числа» начинается съ разсмотрѣнія направленныхъ отрѣзковъ и изъ этого разсмотрѣнія устанавливается понятіе объ отрицательномъ числѣ. Опредѣливъ дѣйствія надъ новыми числами, авторъ обращаетъ вниманіе, что согласно сдѣланнымъ опредѣленіямъ этихъ дѣйствій соблюдается принципъ постоянства формальныхъ законовъ операцій (въ общемъ видѣ этотъ принципъ не формулированъ).

2) Авторъ даетъ формальное опредѣленіе умноженія алгебраическихъ чиселъ, но прежде чѣмъ дать это опредѣленіе разсматриваетъ задачу объ опредѣленіи разстоянія, пройденнаго точкой при равномѣрномъ движеніи при условіи, что скорость и промежутокъ времени принимаютъ и положительныя и отрицательныя значенія.

3) Въ статьѣ «приложенія ученія объ алгебраическихъ числахъ» дается теорема Шаля-Мебіуса. Замѣтимъ, что эта теорема является дѣйствительно необходимой для достаточно обоснованнаго изложенія нѣкоторыхъ вопросовъ тригонометріи и аналитической геометріи.

4) Понятіе о функціи дается вслѣдъ за изложеніемъ вопроса о дѣйствіяхъ надъ многочленами и алгебраическими дробями.

Послѣ этого авторъ сейчасъ же знакомитъ учащихся съ нѣкоторыми свойствами цѣлой алгебраической функціи.

5) Передъ статьей объ уравненiяхъ дана статья «особыя формы числовыхъ значенiй алгебраическихъ выраженiй» $\left(\frac{m}{o}, \frac{o}{m}, \frac{m}{\infty}, \frac{\infty}{m}, \frac{o}{o}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, o.\infty\right)$.

6) Вопросъ объ иррацiональныхъ числахъ и дѣйствiяхъ надъ ними изложенъ по Дедекинду. Установивъ понятiе о «сѣченiи» рацiональныхъ чиселъ на два класса, авторъ даетъ слѣдующее опредѣленiе: «иррацiональное число есть та черта (?) или правило (?), которое раздѣляетъ всѣ рацiональныя числа на двѣ группы, опредѣляющiя это число».

7) Послѣ статьи о рѣшенiи уравненiй дано изслѣдованiе свойствъ квадратнаго и биквадратнаго трехчленовъ, и затѣмъ уже авторъ знакомитъ учащихся съ графическимъ изображенiемъ алгебраическихъ функцiй.

Въ вопросѣ о графикахъ въ средней школѣ различные авторы держатся различныхъ взглядовъ на взаимоотношенiе между этимъ вопросомъ и элементами аналитической геометрiи. Глаголевъ по этому поводу высказывается слѣдующимъ образомъ: «простѣйшiй прiемъ изслѣдованiя различныхъ алгебраическихъ выраженiй состоитъ въ воплощенiи алгебраическихъ выраженiй въ геометрическiе образы и изслѣдованiи послѣднихъ. Средства для такого геометрическаго представленiя даетъ аналитическая геометрiя, съ простѣйшими элементами которой прежде всего и необходимо познакомиться».

Согласно этому взгляду, авторъ и предваряетъ статью «графика измѣненiя алгебраическихъ функцiй» изложенiемъ элементовъ аналитической геометрiи (понятiе о координатахъ точки, разстоянiе между двумя точками, уравненiе прямой, уравненiя: круга, эллипса, гиперболы и параболы). Изложенiю этихъ элементовъ аналитической геометрiи посвящено двадцать двѣ страницы.

Въ статьѣ «графики измѣненiя алгебраическихъ функцiй». авторъ даетъ: 1) построенiе графики линейной функцiи и изученiе процесса измѣненiя этой функцiи; въ связи съ этимъ изученiемъ даны изслѣдованiя уравненiя 1-ой степени и системы двухъ уравненiй 1-ой степени, вмѣстѣ съ графическими интер-

претаціями этихъ изслѣдованій; 2) графическое представленіе измѣненія трехчлена второй степени и примѣры построенія различныхъ кривыхъ, заданныхъ сравнительно сложными уравненіями — напр.: $y=\frac{3x^2-4x+3}{x^2+1}$, $y=\frac{2x^2-8x+8}{x^2-5x+4}$ и т. п.

8) Въ изложеніи статьи о логариѳмахъ авторъ отступаетъ отъ обычно принятаго въ нашихъ руководствахъ опредѣленія логариѳма, какъ показателя степени, устанавливая понятіе о логариѳмѣ изъ разсмотрѣнія двухъ прогрессій — геометрической и ариѳметической, первые члены которыхъ соотвѣтственно суть *1* и *0*. При такой постановкѣ вопроса автору удается выяснить ученикамъ значеніе Неперовой системы логариѳмовъ.

9) Дано гораздо болѣе подробное, сравнительно съ другими учебниками, изложеніе вопросовъ о сложныхъ процентахъ, учетѣ и рентахъ.

10) Въ курсѣ дается понятіе объ исчисленіи вѣроятностей и приложенія этого исчисленія къ рѣшенію практическихъ вопросовъ, напр., страхованіе капитала на случай смерти, пожизненная рента.

11) Статьи: непрерывныя дроби, неопредѣленныя уравненія, теорія соединеній, биномъ Ньютона, комплексныя числа подробно и обстоятельно изложены въ разсматриваемомъ курсѣ.

12) Дана дополнительная статья въ объемѣ ста страницъ, имѣющая цѣлью дать болѣе строгое обоснованіе изученію процесса измѣненія функцій введеніемъ элементовъ анализа безконечно-малыхъ. Содержаніе этой статьи составляютъ слѣдующіе вопросы: 1) предѣлы (20 стр.); 2) непрерывность функцій (7 стр.) 3) производныя простѣйшихъ функцій (16 стр); 4) приложеніе производныхъ къ изслѣдованію измѣненія функцій (57 стр.).

Полагаемъ, что приведеннымъ нами самымъ краткимъ обзоромъ содержанія курса Глаголева оправдывается данное выше указаніе на разнообразіе и обширность матеріала этого курса. «Реформистскіе» взгляды отразились въ этомъ курсѣ главнымъ образомъ на введеніи новыхъ статей (элементы ученія о функціи), но нельзя сказать, чтобы эти статьи были

связаны въ одно цѣлое съ остальными статьями курса. нельзя сказать, чтобы трудъ Глаголева представлялъ собою опытъ планомѣрно разработаннаго, выдержаннаго въ опредѣленномъ направленіи элементарнаго курса алгебры для средней школы. Вліяніе французскихъ авторовъ замѣтно отразилось на многихъ статьяхъ курса—особенно замѣтно вліяніе курса Бурле.

К. О. Лебединцевъ. Курсъ алгебры для среднихъ учебныхъ заведеній.

Курсъ состоитъ изъ 2-хъ частей въ объемѣ 580 страницъ: первая часть курса вышла уже вторымъ изданіемъ.

Въ предисловіи къ 1-му изданію первой части курса авторъ обращаетъ вниманіе на слѣдующее: «содержаніе курса построено такъ, чтобы онъ представлялъ изъ себя параллельное развитіе двухъ основныхъ идей—понятія о числѣ и понятія о функціональной зависимости». Развивая далѣе въ томъ же предисловіи взгляды на содержаніе и методъ изложенія элементарнаго курса алгебры, авторъ ссылается на Клейна, Бореля, а также и на автора экспериментальной дидактики Лайя (взглядъ на сущность процесса отвлеченія).

Содержаніе курса: всѣ тѣ статьи, которыя обычно, въ соотвѣтствіи съ оффиціальными программами, составляютъ содержаніе школьнаго курса алгебры и, кромѣ того, слѣдующія дополненія: 1) вслѣдъ за ученіемъ объ уравненіяхъ и неравенствахъ 1-ой степени авторъ излагаетъ статью: функціи перваго порядка и ихъ наглядное изображеніе. Равнымъ образомъ за статьей о квадратныхъ уравненіяхъ помѣщена статья: функціи второго порядка отъ одного независимаго перемѣннаго и ихъ наглядное изображеніе; 2) основы ученія о предѣлахъ въ связи съ понятіемъ о производной функціи; 3) основы ученія о мнимыхъ и комплексныхъ числахъ.

Относительно общаго характера изложенія и разработки отдѣльныхъ статей курса отмѣтимъ слѣдующее:

1) Авторъ, какъ это можно видѣть изъ предисловія, желалъ бы избѣжать абстрактно-дедуктивнаго метода положе

нія, противупоставляя этому методу методъ конкретно-индуктивный.

Исходя изъ этой точки зрѣнія авторъ предполагаетъ строить теорію отрицательныхъ чиселъ, а затѣмъ и несоизмѣримыхъ чиселъ на фундаментѣ конкретныхъ примѣровъ.

Что касается до построенія теоріи отрицательныхъ чиселъ, мы должны замѣтить, что по существу авторъ въ своемъ изложеніи стоитъ на формальной точкѣ зрѣнія; толкованіе же умноженія и дѣленія отрицательныхъ чиселъ на приведенныхъ авторомъ конкретныхъ задачахъ вызываетъ сомнѣніе въ его пріемлемости, какъ съ логической, такъ и съ дидактической точки зрѣнія.

2) Въ изложеніи статьи о несоизмѣримыхъ числахъ авторъ сдѣлалъ попытку дать въ школьномъ курсѣ алгебры болѣе или менѣе исчерпывающую вопросъ и логически обоснованную теорію несоизмѣримаго числа.

Отличительной особенностью изложенія этой статьи слѣдуетъ признать стремленіе автора методически подойти къ различнымъ моментамъ излагаемой теоріи; съ этой цѣлью авторъ начинаетъ съ частнаго примѣра ($\sqrt{2}$) и постепенно подводитъ учащагося къ общему понятію о несоизмѣримомъ числѣ; при этомъ авторъ постоянно имѣетъ въ виду конкретизацію вопроса, прибѣгая къ толкованію отвлеченныхъ понятій на отрѣзкахъ прямой.

Чтобы дать представленіе о томъ, какимъ образомъ авторъ въ концѣ концовъ устанавливаетъ понятіе о несоизмѣримомъ числѣ, приведемъ данное авторомъ опредѣленіе: «мы будемъ вообще называть несоизмѣримымъ числомъ такое (?), которое *по опредѣленію своему будетъ болѣе любого соизмѣримаго* числа, входящаго въ группу чиселъ, опредѣленныхъ какимъ-нибудь условіемъ, и менѣе любого соизмѣримаго числа, не входящаго въ эту группу; причемъ группы эти обладаютъ свойствомъ, что въ первой изъ нихъ нѣтъ наибольшаго числа, а во второй нѣтъ наименьшаго».

Дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами авторъ устанавливаетъ, пользуясь слѣдующей теоремой: «если имѣемъ два

перемѣнныхъ числа k и l, измѣняющихся по какому угодно закону, но такъ что:

1) всѣ значенія ихъ положительны и всякое значеніе менѣе всякаго значенія l;

2) разность соотвѣтствующихъ значеній l и k можетъ сдѣлаться и оставаться менѣе любого напередъ заданнаго положительнаго числа, то существуетъ такое число x, и только одно, которое удовлетворяетъ неравенству $k < x < l$ при всякихъ соотвѣтствующихъ значеніяхъ k и l». Перемѣнныя числа k и l авторъ называетъ перемѣнными границами, опредѣляющими число x.

3) Въ изложеніи статей объ алгебраическихъ преобразованіяхъ и уравненіяхъ не замѣчается осуществленія какихъ либо новыхъ взглядовъ на содержаніе и характеръ изложенія этихъ статей.

4) Понятіе о перемѣнномъ числѣ и функціональной зависимости впервые появляется въ концѣ первой части курса въ статьѣ: функціи перваго порядка и ихъ наглядное изображеніе. Статья эта начинается ознакомленіемъ учащихся съ элементами аналитической геометріи—дано довольно подробно изученіе уравненія прямой и тутъ же дано наглядное изображеніе рѣшенія уравненія первой степени и рѣшенія системы двухъ уравненій. Такимъ образомъ, геометрическая интерпретація рѣшенія и изслѣдованія уравненій ведется не параллельно съ изученіемъ самого рѣшенія и изслѣдованія, а отдѣльно отъ изученія этихъ вопросовъ. Равнымъ образомъ не установлено непосредственной связи между рѣшеніемъ и изслѣдованіемъ уравненія второй степени съ одной стороны и изученіемъ функціи 2-й степени и ея графика—съ другой. Послѣ построенія графика функціи: $y = ax^2 + bx + c$ устанавливаются геометрическія свойства построенной кривой (фокусъ и директрисса параболы). Вслѣдъ за изслѣдованіемъ цѣлой функціи 2-ой степени дается изслѣдованіе дробной функціи вида $y = \frac{ax+b}{a_1x+b_1}$, и затѣмъ также устанавливаются геометрическія свойства кривой, заданной вышенаписаннымъ уравненіемъ (центръ, оси симметріи, фокусы и ассимптоты гиперболы

Всѣ указанныя статьи, относящіяся къ изученію свойствъ простѣйшихъ функцій, изложены внѣ зависимости отъ теоріи предѣловъ и понятія о производной функціи. Теорію предѣловъ и ученіе о производной, вмѣстѣ съ примѣненіемъ производной функціи къ изслѣдованію свойствъ первообразной, авторъ даетъ въ VIII-мъ отдѣлѣ второй части курса—этотъ отдѣлъ можетъ быть разсматриваемъ въ видѣ дополнительной къ курсу статьи; въ этой статьѣ авторъ даетъ, между прочимъ, «примѣненіе теоріи предѣловъ къ выводу формулы длины окружности и площади круга».

5) Статьѣ о логариѳмахъ предшествуетъ изученіе показательной функціи и ея графика. Изученіе логариѳма иллюстрируется построеніемъ графика логариѳмической функціи.

Благодаря тому, что авторъ далъ въ своемъ курсѣ теорію ирраціональнаго числа, явилась возможность въ нѣкоторыхъ вопросахъ статьи о показательной функціи и логариѳмахъ говорить болѣе обоснованно.

Заканчивая разсмотрѣніе курса Лебединцева, укажемъ, что и въ этомъ курсѣ такъ же, какъ и въ курсѣ Глаголева. вліяніе «реформистскаго» направленія сказалось главнымъ образомъ на введеніи въ курсъ новыхъ статей (изученіе простѣйшихъ алгебраическихъ функцій и ихъ графикъ) и оно сравнительно мало сказалось на общей конструкціи курса. Введеніе новыхъ статей и болѣе широкое развитіе нѣкоторыхъ изъ тѣхъ статей, которыя обычно входятъ въ составъ курса элементарной алгебры (напр., статья объ ирраціональномъ числѣ), повело къ весьма значительному, сравнительно, объему курса (579 страницъ). Въ изложеніи статей, относящихся къ вопросу объ изученіи простѣйшихъ алгебраическихъ функцій, наиболѣе замѣтно отразилось вліяніе Бореля.

Д. Левитусъ. Курсъ элементарной алгебры для среднихъ учебныхъ заведеній, ч. I и II.

Трудъ Левитуса еще не законченъ—мы имѣемъ лишь первыя двѣ части курса, содержаніе которыхъ составляютъ слѣдующія статьи:

1-я часть — ученіе объ алгебраическихъ обозначеніяхъ и преобразованіяхъ въ предѣлахъ четырехъ основныхъ дѣйствій

и рѣшеніе численныхъ уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

2-я часть—ученіе о преобразованіяхъ дробныхъ выраженій, рѣшеніе уравненій первой степени съ однимъ и многими неизвѣстными и графическій методъ изслѣдованія въ примѣненіи къ задачамъ первой степени.

Отмѣтимъ слѣдующія наиболѣе характерныя черты въ содержаніи, конструкціи и методѣ изложенія этого курса:

1) Авторъ имѣетъ въ виду дать концентрическое расположеніе матеріала своего курса — такъ, напримѣръ: указавъ въ § 4 второй части отличіе алгебраической дроби отъ ариѳметической и напомнивъ учащимся основное свойство ариѳметической дроби, авторъ говоритъ: «въ *послѣдней части нашего курса приведено доказательство* того, что и въ этомъ случаѣ (въ случаѣ алгебраической дроби) основное свойство дроби остается въ силѣ. *Пока же примемъ безъ доказательства*, что числитель и знаменатель алгебраической дроби можно умножить или раздѣлить на одно и то же число; отъ этого величина дроби не измѣнится», да и въ расположеніи матеріала, составляющаго содержаніе первыхъ двухъ частей курса, можно отмѣтить осуществленіе принципа концентрическаго расположенія этого матеріала—различные вопросы курса постоянно переплетаются между собой: ученіе объ алгебраическихъ преобразованіяхъ и рѣшеніе уравненій изложены не въ видѣ отдѣльныхъ статей, болѣе или менѣе исчерпывающихъ содержаніе вопроса — нѣтъ, эти вопросы излагаются параллельно другъ другу; на первыхъ же страницахъ авторъ знакомитъ учащихся съ составленіемъ и рѣшеніемъ самыхъ простыхъ уравненій, усложняя ихъ дальше по мѣрѣ накопленія фактическаго матеріала въ области формальныхъ преобразованій

2) Изученіе алгебраическихъ преобразованій проводится весьма постепенно, при этомъ авторъ очень мало заботится о *доказательности*. Путемъ нѣкоторыхъ разъясненій, а главнымъ образомъ, путемъ рѣшенія различныхъ примѣровъ, въ большомъ количествѣ сопровождающихъ изложеніе статей учебника, онъ старается научить учениковъ техникѣ алгебраическихъ преобразованій.

Равнымъ образомъ, въ этомъ концентрѣ не дается никакой теоріи уравненій—авторъ на примѣрахъ знакомитъ учениковъ съ различными пріемами рѣшенія уравненій.

3) Въ статьѣ «положительныя и отрицательныя числа» авторъ, указавъ на невозможность вычитанія въ томъ случаѣ, когда уменьшаемое меньше вычитаемаго, далѣе говоритъ: «Въ алгебрѣ разсматриваются числа особаго рода, называемыя отрицательными. Они обладаютъ (?) тѣмъ свойствомъ, что отъ ихъ прибавленія получается меньше, чѣмъ было раньше. Такія числа отмѣчаются знакомъ минусъ передъ ними. Такъ, напр., —3 обозначаетъ число, отъ прибавленія котораго то, что было, уменьшится на 3». Послѣ сдѣланнаго, весьма кратко, замѣчанія о томъ, что будто бы «нѣтъ ничего страннаго въ томъ, что въ алгебрѣ разсматриваются такія особенныя числа», авторъ безъ всякихъ опредѣленій, обоснованій на чемъ бы то ни было, даетъ правила сложенія и вычитанія положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, выводя ихъ изъ разсмотрѣнія слѣдующихъ четырехъ примѣровъ: 1) $(+3)+(+5)$; 2) $(-3)+(-5)$; 3) $(+3)+(-5)$; 4) $(+7)+(-4)$.

Приведемъ для характеристики разъясненіе, сопровождающее рѣшеніе одного изъ этихъ примѣровъ:

«Сложить $+3$ и -5. Число -5 состоитъ изъ пяти отрицательныхъ единицъ; три изъ нихъ взаимно уничтожатся съ тремя положительными единицами, содержащимися въ числѣ $+3$, и въ суммѣ останутся только двѣ отрицательныя единицы.

Итакъ, $(+3)+(-5)=-2$.

Опредѣленіе умноженія и дѣленія отрицательныхъ дано не непосредственно вслѣдъ за сложеніемъ и вычитаніемъ, а значительно позже.

Къ геометрическимъ интерпретаціямъ понятія объ отрицательныхъ числахъ и дѣйствій надъ ними авторъ совершенно не прибѣгаетъ и, видимо, не случайно, такъ какъ въ изложеніи нѣкоторыхъ другихъ вопросовъ авторъ пользуется ихъ геометрическимъ толкованіемъ.

4) Послѣднія пять главъ изъ тринадцати, составляющихъ вторую часть курса, посвящены вопросамъ, связаннымъ съ по-

нятіемъ о функціональной зависимости. Содержаніе эти главъ слѣдующее: 1) общія понятія о функціональной зави мости и о графикѣ функціи; 2) прямая пропорціональнос 3) линейная функція; 4) примѣненіе графическаго метода рѣшенію различныхъ задачъ; 5) особенные случаи систе двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

При изложеніи этого отдѣла авторъ не считаетъ нужны давать какія-либо предварительныя свѣдѣнія изъ аналити ской геометріи; для него графикъ интересенъ лишь какъ н глядное изображеніе той или другой функціональной зави мости, геометрическія свойства полученной кривой совершен игнорируются.

Ознакомленіе съ построеніемъ графика проводится ме дически, останавливая вниманіе учащихся на различныхъ м ментахъ этого построенія; при этомъ затрагиваются вопросы непрерывности и интерполированіи.

Трудно, конечно, дать общую характеристику труда г. Л витуса, вслѣдствіе того, что трудъ этотъ еще не закончен но, однако же, и теперь уже можно сказать, что на намѣ ніяхъ автора «реформистскіе взгляды отразились въ слѣд ющемъ: 1) введеніе въ курсъ новыхъ статей (изученіе фун цій и ихъ графикъ), 2) принципъ концентрическаго распол женія матеріала, съ примѣненіемъ въ каждомъ концентрѣ отвѣтствующаго метода изложенія.

По поводу концентрическаго расположенія матеріа въ связи съ разсмотрѣніемъ труда г. Левитуса. сч таемъ умѣстнымъ высказать слѣдующее: мы не може указать въ иностранной литературѣ, по предмету алгебр учебника, въ которомъ былъ бы выдержанъ принципъ ко центрическаго расположенія матеріала, но, напримѣръ, во фра цузской средней школѣ въ различныхъ классахъ примѣняют спеціально для этихъ классовъ составленные, учебники одно и того же или различныхъ авторовъ; русскіе же авторы. соотвѣтствіи съ оффиціальными программами и школьной пра тикой, обыкновенно составляютъ учебникъ по данному пре мету для примѣненія его во всѣхъ классахъ и, часто, въ уче ныхъ заведеніяхъ всѣхъ типовъ — многіе недочеты наши

современныхъ учебниковъ и въ дидактическомъ и въ научномъ отношеніяхъ при этомъ являются совершенно неизбѣжными.

А. Киселевъ. Элементарная алгебра; изданіе двадцать третье (переработанное).

Его же. Графическое изображеніе нѣкоторыхъ функцій, разсматриваемыхъ въ элементарной алгебрѣ. Пособіе для кадетскихъ корпусовъ и другихъ учебныхъ заведеній.

Въ разсматриваемомъ изданіи курса элементарной алгебры авторъ далъ изложеніе статей объ отрицательныхъ числахъ и о числахъ несоизмѣримыхъ совершенно отличное отъ того, которое имѣло мѣсто въ предыдущихъ изданіяхъ его учебника.

Понятіе объ алгебраическихъ числахъ устанавливается изъ разсмотрѣнія конкретныхъ величинъ, «имѣющихъ направленіе».

Изъ разсмотрѣнія сложенія направленныхъ отрѣзковъ устанавливается понятіе о суммѣ алгебраическихъ чиселъ и указывается, что сложеніе этихъ чиселъ подчиняется законамъ: перемѣстительному и сочетательному. Умноженіе алгебраическихъ чиселъ опредѣляется формально съ соотвѣтствующими разъясненіями; указывается, что законы: перемѣстительный, сочетательный и распредѣлительный имѣютъ мѣсто и въ случаѣ умноженія алгебрическихъ чиселъ; мелкимъ шрифтомъ дано толкованіе смысла умноженія этихъ чиселъ на конкретной задачѣ.

Ученіе о несоизмѣримыхъ числахъ дано въ двухъ различныхъ изложеніяхъ — одно изложеніе дано въ текстѣ учебника и проведено соотвѣтственно среднимъ классамъ гимназіи, другое изложеніе дано въ приложеніи къ курсу, въ немъ достаточно строго и подробно проведена теорія несоизмѣримыхъ чиселъ по Дедекинду.

Конструкція статьи о несоизмѣримомъ числѣ, приведенной въ текстѣ учебника, въ общихъ чертахъ такова: 1) разсматривается измѣреніе прямолинейнаго отрѣзка и, въ случаѣ его несоизмѣримости съ выбранной единицей, указывается на невозможность полученія «точнаго результата при измѣреніи» — «но тогда мы можемъ», говоритъ авторъ, «находить прибли-

женные результаты измѣренія (?) и притомъ съ какою угодно точностью».

2) Устанавливается соотвѣтствіе между числами и точками прямой, указывается, что не всякой точкѣ, взятой на «числовой прямой», соотвѣтствуетъ нѣкоторое число и затѣмъ создается понятіе о несоизмѣримомъ числѣ слѣдующимъ образомъ: «допускаютъ, что при данной единицѣ длины *каждой* точкѣ B числовой прямой соотвѣтствуетъ опредѣленное *число*, принимаемое за мѣру того отрѣзка AB, концомъ котораго служитъ эта точка B. Если отрѣзокъ AB соизмѣримъ съ единицей длины, то точкѣ B соотвѣтствуетъ соизмѣримое число если же онъ несоизмѣримъ съ единицей длины, то точкѣ B соотвѣтствуетъ нѣкоторое несоизмѣримое число, которое нельзя выразить цифрами (?), но можно обозначить какимъ-нибудь знакомъ, напримѣръ, одной изъ буквъ греческаго алфавита: α, β, γ . . . . ».

Приближенный результатъ измѣренія несоизмѣримаго отрѣза съ точн. до $\frac{1}{n}$ (это понятіе установлено ранѣе при разсмотрѣніи процесса измѣренія), которому мѣрою служитъ несоизмѣримое число α, авторъ называетъ *приближеннымъ значеніемъ числа* α *съ точностью до* $\frac{1}{n}$ и затѣмъ ставитъ *условіе*, согласно которому несоизмѣримое число α больше всякаго изъ приближенныхъ значеній съ недостаткомъ и меньше всякаго изъ приближенныхъ значеній съ избыткомъ.

3) Установивъ понятіе о равенствѣ и неравенствѣ несоизмѣримыхъ чиселъ, авторъ переходитъ затѣмъ къ опредѣленію дѣйствій надъ несоизмѣримыми числами. Приведемъ, въ видѣ примѣра, данное авторомъ опредѣленіе сложенія: «сложить числа α, β, γ . . . значитъ найти число, большее каждой суммы $a+b+c+$ . . . и меньше каждой суммы $A+B+$ $+C+$ . . . . , гдѣ подъ a, b, c . . . . разумѣются *какія угодно* приближенныя значенія чиселъ α, β, γ . . . . , взятыя съ недостаткомъ, а подъ A, B, C . . . . *какія угодно* приближенныя значенія тѣхъ же чиселъ, взятыя съ избыткомъ». Доказательства существованія искомаго числа не приводится. Опредѣленіе поясняется на примѣрѣ.

Разсматриваемая нами въ связи съ этимъ курсомъ брошюра того же автора: «Графическое изображеніе нѣкоторыхъ функцій, разсматриваемыхъ въ элементарной алгебрѣ» содержитъ слѣдующія статьи: 1) общее понятіе о функціи и ея графическомъ изображеніи; 2) графическое изображеніе двучлена 1-й степени, измѣненіе двучлена 1-й степени, графическое изображеніе системы двухъ уравненій 1-й степени; 3) графическое изображеніе трехчлена 2-й степени, измѣненіе трехчлена 2-й степени, графическій способъ рѣшенія квадратнаго уравненія; 4) графическое изображеніе функцій показательной и логарифмической; 5) упражненія. Относительно изложенія этихъ статей отмѣтимъ слѣдующее:

1) Вопросъ о непрерывности функцій не затрагивается.

2) Изученіе двучлена первой степени и его графика проводится постепенно, начиная съ построенія графика функціи $y=ax$ въ случаѣ $a>o$. При этомъ доказывается, что всѣ точки, у которыхъ абсциссами служатъ значенія x, а ординатами, соотвѣтствующія значенія, y лежатъ на одной и той же прямой, проходящей черезъ начало координатъ и обратно: координаты всякой точки построенной прямой удовлетворяютъ уравненію: $y=ax$. Затѣмъ строится графикъ той же функціи для случаевъ: $a<o$ и $a=o$.

Далѣе разсматривается измѣненіе положенія прямой въ зависимости отъ измѣненія коэффиціента a, при этомъ дается понятіе объ угловомъ коэффиціентѣ прямой.

Графикъ функціи: $y=ax+b$, авторъ получаетъ параллельнымъ перенесеніемъ графика: $y=ax$, кромѣ того указывается способъ построенія прямой: $y=ax+b$ по точкамъ пересѣченія этой прямой съ осями координатъ.

Измѣненіе двучлена: $ax+b$ устанавливается непосредственно изъ разсмотрѣнія графика.

3) При изученіи трехчлена второй степени послѣдовательно строятся графики функцій: $y=x^2$, $y=ax^2$, $y=ax^2+c$, $y=a(x+m)^2$ и, наконецъ, $y=ax^2+b+c$. При этомъ указывается, что всѣ получаемыя кривыя имѣютъ одинъ и тотъ же характеръ. Геометрическихъ свойствъ параболы авторъ не разсматриваетъ.

Въ статьѣ о графикахъ показательной и логариомическо функцій устанавливается связь между этими функціями и их графиками.

Отмѣченныя выше измѣненія, внесенныя г. Киселевым въ послѣднее изданіе своего курса, а также составленіе им дополнительныхъ къ курсу статей, относящихся къ понят функціональной зависимости, указываютъ на то, что автор этого, наиболѣе распространеннаго въ нашей средней школѣ наиболѣе приспособленнаго къ оффиціальнымъ программам курса счелъ необходимымъ, не дожидаясь измѣненія оффи ціальныхъ программъ (программа курса алгебры, составлен въ духѣ проведенія идеи функціональной зависимости, введе у насъ лишь въ кадетскихъ корпусахъ), считаться съ тѣм новымъ направленіемъ въ преподаваніи математики, котор въ настоящее время привлекаетъ вниманіе педагоговъ и пол чаетъ въ томъ или иномъ видѣ осуществленіе въ школьн практикѣ и учебной литературѣ различныхъ странъ.

Намъ остается еще указать на «*Курсъ элементарной а лгебр составленный по Бертрану, Бурле, Таннери и др.» Н. Бил бина, изданіе пятое, измѣненное.*

Этотъ трудъ не можетъ быть разсматриваемъ въ ря разсмотрѣнныхъ нами руководствъ, такъ какъ авторъ стави себѣ задачу иначе, чѣмъ большинство составителей русски учебниковъ по алгебрѣ,—онъ имѣетъ въ виду лишь старш классы среднихъ учебныхъ заведеній и по это поводу говоритъ въ своемъ предисловіи слѣдующее: «Насто щее, пятое изданіе «Курса алгебры» назначается, подобно пред дущимъ изданіямъ, для старшихъ классовъ среднихъ учебны заведеній, а не для первоначальнаго изученія алгебры, како должно вестись, главнымъ образомъ, на примѣрахъ и задачах при попутномъ истолкованіи теоретическихъ основъ».

Существеннымъ и интереснымъ отличіемъ пятаго и данія курса Билибина является выдѣленіе и объединеніе всѣ тѣхъ статей школьнаго курса алгебры, которыя носятъ «арием тическій» характеръ и имѣютъ въ виду «расширеніе поня о числѣ».

Изложеніе этихъ статей и составляетъ содержаніе перв

книги курса. Мы нѣсколько подробнѣе остановимся на разсмотрѣніи этой первой книги; что же касается до остальныхъ, то ограничимся лишь указаніемъ, что преподаватель найдетъ въ нихъ подробное и строгое изложеніе вопросовъ, обычно относимыхъ къ школьному курсу алгебры. Изложеніе дано въ духѣ большихъ французскихъ курсовъ—самъ авторъ указываетъ на вліяніе на свой трудъ Курса Бурле. «Leçons d'algèbre élémentaire». Дается подробное изслѣдованіе цѣлой функціи второй степени, но къ графикамъ функціи авторъ нигдѣ не прибѣгаетъ.

Обращаясь къ первой книгѣ курса, перечислимъ прежде всего статьи, составившія ея содержаніе: основныя ариѳметическія понятія, относительныя числа, приложенія положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, корни, ирраціональныя числа.

Въ главѣ «основныя ариѳметическія понятія» авторъ подробно разсматриваетъ свойства суммы, разности, произведенія и частнаго натуральныхъ и дробныхъ чиселъ.

Для ознакомленія съ характеромъ изложенія этой главы укажемъ на конструкцію статьи о сложеніи. Опредѣленія суммы двухъ чиселъ не дается; основныя свойства суммы постулируются слѣдующими равенствами: $O+A=A$ (1) и $A+B+C=A+C+B$ (2); изъ этихъ двухъ равенствъ выводится, какъ слѣдствіе: $B+C=C+B$.

Указывается, что равенство (2), допущенное для цѣлыхъ чиселъ, остается справедливымъ и для дробныхъ чиселъ.

Далѣе доказывается теорема: «сумма какого ни есть числа слагаемыхъ не измѣняется отъ перемѣны порядка сложеній» и изъ этой теоремы выводятся слѣдствія: 1) «въ суммѣ какія ни есть слагаемыя можно замѣнить изъ вычисленной суммой», 2) «для того, чтобы къ числу A прибавить сумму, достаточно прибавить каждое слагаемое послѣдовательно».

Дается опредѣленіе: «говорятъ, что число A болѣе числа B, если оно получено отъ прибавленія къ числу B нѣкотораго числа, отличнаго отъ нуля. Обратно: говорятъ, что число B менѣе числа A».

На основанiи этого опредѣленiя доказываются слѣдующ положенiя: 1) «если $B > A$ и $C > B$, то $C > A$», 2) «ес двѣ суммы состоятъ изъ одного и того же числа слагаемы причемъ слагаемыя первой суммы соотвѣтственно болѣе сл гаемыхъ второй, то первая сумма болѣе второй».

Глава II-я посвящена изложенiю вопроса объ относит ныхъ числахъ. Указавъ, что, въ цѣляхъ сохраненiя общно выраженiя $A-B$, должно ввести «числа новой природы авторъ даетъ слѣдующiя опредѣленiя: 1) «положительны числомъ называется всякое абсолютное число, за исключенiе нуля, предшествуемое знакомъ +», 2) «отрицательнымъ число называется всякое абсолютное число, за исключенiемъ ну предшествуемое знакомъ —».

Послѣ этого дается опредѣленiе равенства относительны чиселъ и опредѣленiя основныхъ дѣйствiй надъ относите ными числами.

Обращаемъ вниманiе на доказательство теоремы: «сум трехъ слагаемыхъ (въ случаѣ относительныхъ чиселъ) не и мѣняется отъ перестановки двухъ послѣднихъ» — приня авторомъ построенiе статьи объ относительныхъ числахъ дѣйствiяхъ надъ ними заставляетъ его при доказательст этой теоремы заняться скучнымъ разсмотрѣнiемъ восьми отдѣльныхъ случаевъ.

Установивъ дѣйствiя надъ относительными числами, авто переходитъ къ понятiю объ «алгебраической суммѣ». Весь подробно разсмотрѣвъ соглашенiя, лежащiя въ основѣ это понятiя, авторъ далѣе приводитъ цѣлый рядъ теоремъ, ус навливающихъ свойства алгебраической суммы.

Въ главѣ III-ей, «приложенiя положительныхъ и отр цательныхъ чиселъ» дается подробное разсмотрѣнiе направле ныхъ отрѣзковъ и устанавливается соотвѣтствiе между эти отрѣзками и точками на нѣкоторой оси, съ одной стороны относительными числами — съ другой. Между прочимъ, дае теорема Шаля-Мебiуса. Кромѣ того, понятiе объ относит ныхъ числахъ и дѣйствiяхъ надъ ними конкретизируется разсмотрѣнiи направленныхъ промежутковъ времени и зада на равномѣрное движенiе.

Конструкція изложенія статьи объ ирраціональныхъ числахъ въ общихъ чертахъ такова:

Въ главѣ IV, «корни», дается понятіе о корняхъ абсолютнаго числа съ точностью до единицы и вообще съ точностью до h—при этомъ замѣтимъ, что опредѣленіе этихъ понятій никакой логической погрѣшности не заключаетъ.

Доказавъ теорему: «Разности между числомъ A и r-овыми степенями его r-овыхъ корней, съ точностью до h, съ недостаткомъ и съ избыткомъ, суть, при достаточно маломъ значеніи h, числа, меньшія напередъ заданнаго числа α, и, при уменьшеніи этого значенія h, продолжаютъ быть менѣе этого числа α», авторъ даетъ затѣмъ слѣдующее опредѣленіе: «говорятъ, что число A, въ случаѣ несуществованія r-оваго раціональнаго корня этого числа, имѣетъ ирраціональный r-овый корень, который обозначается символомъ: $\sqrt[r]{A}$» и далѣе, послѣ нѣкоторыхъ поясненій, говоритъ: «Итакъ, если $a^r < A < a'^r$, то, по опредѣленію символа $\sqrt[r]{A}$, можемъ писать: $a < \sqrt[r]{A} < a'$».

Затѣмъ дается обращеніе ирраціональнаго корня въ десятичную дробь и доказываются, что получаемая при этомъ обращеніи безконечная десятичная дробь не есть періодическая.

Въ главѣ V-ой, «Ирраціональныя числа», устанавливается общее понятіе объ ирраціональномъ (несоизмѣримомъ числѣ) и излагается, достаточно исчерпывающая вопросъ, теорія этого числа.

Понятіе объ ирраціональномъ числѣ устанавливается изъ разсмотрѣнія «разрѣза» (сѣченія) всѣхъ раціональныхъ чиселъ на двѣ совокупности—такимъ образомъ авторъ становится на точку зрѣнія Дедекинда.

Замѣтимъ, что въ трудѣ того же автора «Основанія анализа безконечно-малыхъ» дано изложеніе статьи объ ирраціональномъ числѣ, ближе примыкающее къ теоріи Мере-Кантора.

Вліяніе этой теоріи, въ разсматриваемомъ курсѣ, отразилось до нѣкоторой степени въ статьѣ «Послѣдовательности»,

составляющей одинъ изъ параграфовъ главы объ ирраціональномъ числѣ.

Въ этой статьѣ авторъ доказываетъ, что двумя послѣдовательностями чиселъ, удовлетворяющими нѣкоторымъ опредѣленнымъ условіямъ, опредѣляется одно и только одно раціональное и ирраціональное число. Какъ примѣръ такого опредѣленія чиса, разсмотрѣна система послѣдовательностей, опредѣляющая число e.

Въ заключеніе главы объ ирраціональномъ числѣ устанавливается соотвѣтствіе между значеніями величины и числами.

При размотрѣніи различныхъ учебниковъ по алгебрѣ, мы не разъ обращали вниманіе на изложеніе вопроса объ ирраціональномъ числѣ—этотъ вопросъ, видимо, стоитъ на очереди, интересуетъ преподавателей, а потому позволимъ себѣ указать на нѣкоторыя сочиненія, которыя, по нашему мнѣнію, могли бы быть полезны преподавателю въ этомъ отношеніи:

1) Encyclopédie des sciences mathématiques pures etappliquées. Томъ I—статья Принсгейма (во французскомъ изданіи изложенная и обработанная Молькомъ). Читатель найдетъ здѣсь сущность различныхъ теорій ирраціональнаго числа, историческія указанія и богатыя указанія литературы вопроса.

2) *Веберъ и Вельштейнъ*. Энциклопедія элементарной математики. Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей В. Ф. Кагана. Изданіе Матезисъ. Точка зрѣнія Дедекинда.

3) *Проф. А. В. Васильевъ*. Введеніе въ анализъ. Выпускъ II. Обобщеніе понятія о числѣ. (Складъ изданія: Казань, Маркеловъ и Шароновъ).

Сущность различныхъ теорій ирраціональнаго числа.

4) *Дедекиндъ*. Непрерывность и ирраціональныя числа. Пер. съ нѣм. С. О. Шатуновскаго. Изданіе Матезисъ.

Это же сочиненіе помѣщено въ весьма интересномъ «Сборникѣ статей по основамъ ариѳметики», изданіе математическаго кружка при Казанскомъ университетѣ, подъ редакціей П. П. Парфентьева.

5) *Проф. Б. Я. Букрѣевъ.* Ученіе объ ирраціональномъ числѣ съ точки зрѣнія Г. Кантора и Э. Гейне.

6) *Проф. Селивановъ.* Безконечныя десятичныя дроби и ирраціональныя числа. Точка зрѣнія Вейерштрасса.

7) Ариѳметика ирраціональныхъ чиселъ. Обработалъ М. В. Пирожковъ. Эта книжка, какъ видно изъ предисловія, представляетъ обработку теоріи ирраціональныхъ чиселъ, изложенную ученикамъ старшихъ классовъ Спб. 5-ой гимназіи покойнымъ преподавателемъ этой гимназіи Владиміромъ Андреевичемъ Марковымъ. Въ изложенной теоріи проводится точка зрѣнія, примыкающая къ Вейерштрассу.

8) *Проф. Б. М. Кояловичъ.* Лекціи по высшей математикѣ.

Читатель найдетъ весьма доступное и элементарное изложеніе теоріи ирраціональнаго числа—точка зрѣнія Дедекинда и отчасти Мере-Кантора.

9) *Проф. Боннскаго универ. Герардъ Ковалевскій.* Основы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Перев. съ нѣм. подъ ред. С. О. Шатуновскаго. Изд. Матезисъ.

При опредѣленіи ирраціональныхъ чиселъ авторъ примыкаетъ къ Дедекинду, а въ опредѣленіи ариѳметическихъ операцій надъ ними—къ Кантору.

10) *Meray.* Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale.

11) *J. Tannery.* Introduction à la theorie des fonctions.

12) *J. Tannery.* Leçons d'arithmétique.

Въ этихъ двухъ сочиненіяхъ читатель найдетъ весьма ясное и изящное изложеніе теоріи ирраціональныхъ чиселъ по Дедекинду.

13) *B. Niewenglowsky. Cours d'algébre.* Tome premier. 5-е изд.

Изложеніе теоріи ирраціональныхъ чиселъ примыкаетъ къ Мере.

14) *Проф. Фоссъ.* О сущности математики. Рѣчь произнесенная въ публичномъ засѣданіи Баварской академіи наукъ. Пер. І. В. Яшунскаго. С.-Петербургъ 1911 г.

Читатель можетъ познакомиться въ этой брошюрѣ съ сущностью различныхъ теорій ирраціональнаго числа въ связи съ вопросомъ развитія понятія о числѣ вообще.

Хотя мы въ своемъ докладѣ и не задаемся цѣлью дать полный обзоръ по литературѣ предмета алгебры, однако, мы не считаемъ возможнымъ не коснуться нашихъ періодическихъ изданій, въ которыхъ затрагиваются вопросы преподаванія математики.

Наша задача, правда, облегчается тѣмъ, что такихъ изданій у насъ къ сожалѣнію, слишкомъ мало. Журнала, спеціально посвященнаго вопросамъ преподаванія математики, у насъ нѣтъ совсѣмъ *); статьи, относящіяся къ преподаванію математики, чаще всего встрѣчаются въ журналѣ: «Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики», затѣмъ въ «Педагогическомъ сборникѣ», издаваемомъ при главномъ управленіи военно-учебныхъ заведеній и рѣдко въ «Журналѣ Министерства народнаго просвѣщенія» (почти только рецензіи учебниковъ и пособій) и «Русской Школѣ».

Въ виду интереса, возбужденнаго вопросомъ о реформѣ преподаванія математики, въ послѣднихъ семестрахъ журнала «Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики» появилось больше, сравнительно съ предъидущими семестрами, статей, посвященныхъ вопросамъ преподаванія математики; изъ нихъ укажемъ на слѣдующія:

В. Каганъ. Что такое алгебра?—(42-ой семестръ) эта статья издана Матезисомъ въ видѣ небольшой брошюры. Авторъ, между прочимъ, обращаетъ вниманіе на то, что статьи относящіяся къ вопросу расширенія понятія о числѣ, должны быть отнесены къ ариѳметикѣ, предметомъ алгебры

---

*) Послѣ того, какъ этотъ докладъ былъ прочитанъ на съѣздѣ, вышелъ первый номеръ журнала Московскаго математическаго кружка «Математическое Образованіе».

является изученіе алгебраическихъ функцій и эту точку зрѣнія на содержаніе предмета алгебры авторъ полагаетъ возможнымъ провести, хотя бы до нѣкоторой степени, въ выпускномъ классѣ средней школы.

2) По вопросу объ ирраціональныхъ числахъ читатели найдутъ въ журналѣ статьи Е. Смирнова и К. Лебединцева (43-й и 44-й семестры).

Въ № 4, 45-го семестра помѣщена интересная статья прив. доц. С. Виноградова «Новая книга по алгебрѣ». Авторъ знакомитъ съ новымъ учебникомъ алгебры, принадлежащимъ двумъ англійскимъ педагогамъ-математикамъ Барнарду и Чайльду. Въ этой статьѣ указывается, что авторы разсматриваемаго учебника стремились создать такой курсъ элементарной алгебры, въ которомъ ярко выступала бы связь между отдѣльными главами, выбравъ для этой цѣли понятіе о числѣ, какъ центральное.

Разработку въ курсѣ понятій объ уравненіи и функціи можно назвать, по словамъ С. Виноградова, образцовой.

Въ журналѣ «Педагогическій Сборникъ» отмѣтимъ статью Лебединцева, помѣщенную въ Сентябрьской книжкѣ 1910 г. и посвященную вопросу о постановкѣ курса алгебры въ средней школѣ».

После этого доклада было сдѣлано слѣдующее заявленіе К. Н. Деруповымъ.

К. Н. Деруповъ (Спб.), составитель книги «Примѣрный библіотечный каталогъ» [1]), просилъ присутствовавшихъ помочь библіографамъ, и ему въ частности, въ дѣлѣ подбора избранной математической литературы. Указавъ на желательность распространенія образцовыхъ популярныхъ изданій математическаго характера и отмѣтивъ неосвѣдомленность многихъ преподавателей и любителей математики относительно нѣкоторыхъ

[1]) Примѣрный библіотечный каталогъ. Избранная литература по всѣмъ отраслямъ знанія. I и II части изд. Спб. 1908—1911 г.

изданій общаго математическаго или историко-философскаго содержанія,—К. Н. Деруновъ предложилъ выяснить путемъ обмѣна мнѣніями названія такого рода сочиненій. Кромѣ того К. Н. Деруновымъ былъ предложенъ листъ съ небольшимъ перечнемъ подобранныхъ имъ самимъ изданій, и составитель обратился къ присутствовавшимъ съ просьбой вычеркнуть все малоцѣнное или устарѣвшее и, наоборотъ, вписать тѣ сочиненія, которыя заслуживаютъ вниманія.

Математика.

√ 15. Бертранъ Ж.—Ариѳметика. Спб. 01. 2 р. } Изд. Пирожкова.
16. „ Алгебра. 2 в. Спб. 99. 3 р. } Изд. Пирожкова.
√ 17. Бобынинъ В. В.—Философское, научное и педагогическое значеніе исторіи математики М. 86. 50 к.
√ 18. „ Происхожденіе, развитіе и современное состояніе исторіи математики М. 86. 50 к.
√ 19. „ Изслѣдованіе по исторіи математики. М. 87—96. 1 р 75
√ 20. „ Біографіи знаменитыхъ математиковъ XIX ст. М. 86—9 3 р. 35
√ 21. Васильевъ А.—Изъ исторіи и философіи понятія о цѣломъ положительномъ числѣ Кз. 91. 30
√ 22. „ *Н. И. Лобачевскій*. Кз. 94. 50 к.
√ 23 Ващенко-Захарченко М. Э. Исторія математики т. I. Кв. 83. 6 р.
24. „ Алгебр. анализъ Кв. 87. 4 р. 50 к.
√ 25. Веберъ и Вельштейнъ. — Энциклопедія элементарной математики. II «Math». т. I. Од. 07. 3 р. 50
√ 26. Гауссъ, Бельтрами и др.—Объ основаніяхъ геометріи; 2 изд. Кз. 95, 1 р. 2
√ 27. Гельмгольцъ Г.—О происхожденіи и значеніи геометрическихъ аксіомъ Изд. «Н. Об.» Спб. 93 30
√ 28. Гельмгольцъ Г. } Счетъ и измѣреніе. } Пр. Васильева. Кз. 93. 50 к
Кронккеръ Л. } Понятіе о числѣ. }
29. Гюнтеръ Н.—Аналитическая геометрія. Спб. 04.
√ 30. Дедекиндъ Р. — Непрерывность и ирраціональныя числа. Изд. «Ма Од. 06. 40
√ 31 Дюрингъ Е.—Мысли о лучшей постановкѣ преподаванія и изученія математики. Пр. Маракуева. М. 01.
√ 32. Ермаковъ В. П.—Теорія вѣроятностей. Кв 79. 1 р. 50 к.
33. Клейнъ Ф.—Сравнительное обозрѣніе новыхъ геометрическихъ изслѣдованій.—Пр. Синцова. Кз. 96. 3
√ 34. „ Лекціи по избраннымъ вопросамъ геометріи. Кз. 98. 75 к.
35. Клоссовскій А.—Символы элементарной математики. Од. 05.
√ 36. Контъ О.—Курсъ положительной философіи. Т. I. Изд. Гартье. Спб 00
37. Лежандръ.—Элементарная геометрія. 2 изд. Спб. 79.

√38. Литвинова Е. Θ.—Н. И. Лобачевскій. Спб. 95. 25 к. } Изд. Павленкова.
√39. „ С. В. Ковалевская. Спб. 94. 25 к. } Изд. Павленкова.
√40. Лоренцъ Г.—Элементы высшей математики. 2 т. 2 изд. Сытина. (Б. д. С.) [М. 08. 5 р.
V 41. Люкасъ Э.—Математическія развлеченія. Изд. Павленкова. Спб. 83. 1 р.
V 42. Начала Евклида. Изд. Ващенко-Захарченко. Кв. 80 6 р.
V 43. Нернстъ В. и Шенфлисъ А.—Краткій и элементарный курс. дифференці-[альнаго и интегральнаго исчисленій Изд. Исаакова. М. 01. 2 р.
V 44. Папелье Ж.—Начала анализа безконечно-малыхъ. Изд. Іовлева и Коротнева. [В. І. Кз. 06. 1 р.
45. Перри Д.—Курсъ высшей математики. Изд. Гольстена 2 ч. Спб. 02—4.
46. Покровскій П. М.—Памяти К. Вейерштрасса. Кв. 98. 25 к.
V47. Поссе К.—Курсъ дифф. и интегр. исчисленія. Спб. 03. 4 р.
√48. Празднованіе Имп. Казан. Ун. 100-лѣтія годовщины дня рожденія Н. И. [Лобачевскаго. Кз. 94. 1 р.
49. Ройтманъ Д.—Начала геометріи. Спб. 05. 40 к.
V 50. Сборникъ научно-популярныхъ статей Пуанкарэ и др. по основаніямъ ариѳ-[метики. Пр. п. р. Парфентьева. Кз. 06. 1 р. 10 к.
51. Серрэ.—Тригонометрія. Пр. Вроблевскаго. Спб. 02.
V 52. Смирновъ А. В.—Объ аксіомахъ геометріи въ связи съ ученіемъ неогеоме-[тровъ. Кв. 94. 50 к.
53. Сомовъ П. О.—Векторіальный анализъ. Спб. 07. 2 р.
54. Начертательная геометрія. 3 изд. Спб. 81. 2 р.
√ 55. Суворовъ Θ. М.—Объ основаніяхъ геометріи Лобачевскаго. Кз. 94. 20 к.
V 56. Тодгентеръ И.—Координатная геометрія на плоскости. Изд. Павленкова. Спб. [01. 1 р. 50 к.
57. Начальн. теорія уравненій. Изд. Вольфа 3 р.
58. Алгебра Изд. Павленкова. Спб. 91.
59. Тороповъ К.—Краткій курсъ прямолинейной тригонометріи. Прм. 95.
V 60. Филипповъ М.—Элементарная теорія вѣроятностей. Спб. 96. 40 к.
√ 61. Фрейсинэ Ш.—Очерки философіи математики. 2 изд. «Обр.» Спб. 02. 60 к.
V 62. Шаль.—Историческій обзоръ происхожденія и развитія геометрическихъ [методовъ. М. 83. 3 р.
V 63. Шереметевскій В.—Значеніе математическаго анализа для изученія при-[роды. М. 97. 40 к.
64. Эрнгъ Г.—Тригонометрія. Изд. «Фз. Лб». Нк. 05. 45 к.
V 6423. (II.) Адлеръ, А.—Теорія геометрическихъ построеній. Изд. «Math.» Од. 10. [2 р. 25 к.
V 6424. Белюстинъ, В.—Какъ постепенно дошли люди до настоящей ариѳметики. [Изд. «Пд. Л.» М. 07. 75 к.
V 6425. Борель-Штекель.—Элементы математики. Изд, «Math». Од. 11. 3 р.
V 6426. Веберъ и Веллынтейнъ.—Энциклопедія элементарной математики. [Изд. «Math».
V 6427. Власовъ, А. К.—Теорія вѣроятностей. М. 09. Т. II. Од. 09—10. 5 р. 50 к.
√ 6428 Володкевичъ, Н. Н.—Къ вопросу о реформѣ преподаванія математики. [Кв. 10. 40 к.
V 6429. Дедекиндъ, Р.—Непрерывность и ирраціональныя числа. Изд. «Math» [Од. 08. 40 к.
V 6430. Каганъ, В. Ф.—Основанія геометріи. Од. 07.

√6431. Каганъ, В. Ф.—Что такое алгебра? Од. 10 40 к.
√6432. Ковалевскій, Г.—Введеніе въ исчисленіе безконечно-малыхъ. Изд. «Math». [Од. 09. 1 р.
√6433. Основы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Изд. [«Math». Од. 1. 13 р. 50 к.
√6434. Кэджори, Ф.—Исторія элементарной математики. Изд. «Math». Од. 10. 2 р. 50 к.
√6435. Лапласъ.—Опытъ философіи теоріи вѣроятностей. Пер. п. р. Власова [М. 08. 1 р.
√6436. Лоджъ, О.—Легкая математика. Изд. Сытина. М. 09. 1 р. 60 к.
√6437. Лоренцъ, Г.—Элементы высшей математики. 3 изд. Сытина. Т. I. М. 10.
√6438. Марковъ, А.—Исчисленіе вѣроятностей. Спб. 08.
√6439. Морозовъ, Н.—Начала векторіальной алгебры. Изд. «Общ Плз.» Спб. 09. 2 р.
6440. Перри, Д.—Практ. математика. Изд. Сытина. М. 08. 90 к.
√6441. Фоссъ, А.—О сущности математики. Изд. «Phys.» Спб. 11. 85 к.

Къ заявленію К. Н. Дерунова собраніе отнеслось съ интересомъ, но, вѣроятно, изъ-за недостатка времени и утомленія присутствовавшихъ—просьба К. Н. осталась въ концѣ-концовъ неудовлетворенной.

II. Обзоръ нѣкоторыхъ руководствъ по элементарной геометріи.

Докладъ А. Р. Кулишера (Спб.).

«Въ обзорѣ руководствъ по элементарной геометріи я остановлюсь на описаніи, главнымъ образомъ, слѣдующихъ семи сочиненій 1) Лаццери и Бассани *). *Начала геометріи.* 2) Генрици и Трейтлейнъ. *Учебникъ элементарной геометріи.* 3) Мерэ. *Новыя начала геометріи.* 4) Веронезе. *Начала геометріи.* 5) Энрикесъ и Амальди. *Начала геометріи.* 6) Клейнъ. *Вопросы элементарной и высшей математики* т. II гл. 3 и 7) Энрикесъ, *Вопросы элементарной геометріи.* Сверхъ того, въ связи съ книгой Мерэ, нельзя будетъ не упомянуть о примыкающихъ къ ней двухъ учебникахъ *Бурлэ* и *Бореля*—8 и 9. Послѣдніе два учебника и первыя

*) G. Lazzeri und A. Bassani. *Elemente d. Geometrie.* Переводъ съ 2-го итальянскаго изд. (1-е изд. вышло въ свѣтъ въ 1891 г.). P. Treutlein'a Berlin, 1911 г. XVI+491 стр. (большой форматъ).

2) I. Henrici et P. Treutlein. *Lehrbuch d. Elementar-Geometrie.* Изд 4-е, Лейпцигъ, 1910 (1-е изд., 1891 г.). 571 стр. (большой форматъ).

пять изъ названныхъ сочиненій характерны для существующихъ на Западѣ теченій въ преподаваніи геометріи и вмѣстѣ съ тѣмъ позволяютъ намъ въ томъ случаѣ, если бы мы согласились съ точкой зрѣнія авторовъ, непосредственно приложить на практикѣ въ преподаваніи ту или другую часть разработанныхъ ими курсовъ и отчасти избавить себя и учениковъ отъ нѣкоторыхъ ошибокъ и увлеченій, сопровождающихъ всякое значительное измѣненіе въ преподаваніи. Хотя первыя изданія этихъ книгъ помѣчены датами довольно отдаленными, но идеи, въ нихъ заключающіяся, даже на родинѣ авторовъ получили широкое распространеніе лишь въ послѣднее десятилѣтіе, а не являются сколько-нибудь устарѣлыми. Сочиненія же Клейна и Энрикеса (6 и 7 въ нашемъ спискѣ) могутъ освѣтить преподавателю геометріи его путь съ болѣе широкихъ точекъ зрѣнія. Что касается до литературы по элементарной геометріи за послѣдніе годы на русскомъ языкѣ, то я ее здѣсь не разсматриваю, такъ какъ предполагаю, что по поводу другихъ докладовъ, соприкасающихся съ даннымъ предметомъ и помѣщенныхъ въ программѣ занятій Съѣзда, докладчики и лица, принимающіе участіе въ преніяхъ, быть можетъ даже не касаясь самихъ учебниковъ, отмѣтятъ все сколько-нибудь для послѣднихъ характерное. Къ тому же учебную литературу на русскомъ языкѣ обсуждаютъ всегда въ многочисленныхъ рецензіяхъ, помѣщаемыхъ въ журналахъ.

---

3) Ch. Meray. *Nouveaux Éléments de Géométrie.* Изд. 3-е Дижонъ 1906 г., 309 стр.

[Borel. Géométrie. C. Bourlet. Cours abrégé de géométrie (см. ниже)].

4) G. Veronese. *Elementi di Geometria.* 4-е изд. (1-е изд. въ 1897 г.) Падуя, 1909 г. (мал. форм.), 381 стр.

5) F. Enriques et U. Amaldi. *Elementi di Geometria.* 5-е изд. (1-е изд. въ 1903 г.). Болонья, 1911 г. (мал. форматъ) 616 стр...

6) F. Klein. *Elementar-Mathematik vom höheren Standpunkte aus.* T. II. Лейпцигъ, 1909 г., 514 стр., въ изд. *Mathesis* печатается русскій переводъ.

7) F. Enriques. *Fragen d. Elementar-Mathematik.* Перев. съ итальянскаго (1-е изд. 1900 г.) XI + 714; согласно проспекту въ издательствѣ *Physice* готов. русскій переводъ.

8) E. Borel. *Géométrie.* Парижъ, 1905 г., X+383 (мал. форм.).

9) C. Bourlet. Cours abrégé de Géométrie. Парижъ, 1908 г., XXII+646 стр. (мал. форм.).

1. Мы представимъ себѣ характеръ сочиненія Лаццер и Бассани, быть можетъ, наиболѣе ясно, если остановим подробно на одной изъ пяти «книгъ», на которыя распадает эта работа, и лучше всего на первой «книгѣ».

По выясненіи того, какимъ путемъ создаются у на *конкретныя* представленія о пространствѣ, тѣл поверхности, линіи и точкѣ, авторы на протяженіи пят страницъ крупнаго формата (за вычетомъ небольшого чис строкъ, посвященныхъ второстепеннымъ опредѣленіямъ и н которымъ поясненіямъ) излагаютъ первые 7 постулатовъ ихъ подраздѣленія. Это будутъ: I постулатъ о *геометриче скихъ образахъ*; II и III постулаты *движенія*; IV пост латъ о *дѣлимости* на части *пространства, поверхностей линій*; V-й постулатъ опредѣляющій *прямую*; VI-й пост латъ опредѣляющій *плоскость*; VII-й постулатъ, опред ляющій *взаимное* расположеніе плоскостей и также пр мыхъ, другъ съ другомъ пересѣкающихся или совмѣщающих Двумя доказанными на основаніи этихъ постулатовъ т оремами и слѣдствіями изъ нихъ заканчивается перв отдѣлъ (Abschnitt) первой книги. Во второмъ отдѣлѣ разб рается вопросъ объ отрѣзкахъ и углахъ линейны и двугранныхъ. Отрѣзкамъ, какъ таковымъ, удѣлено оче немного мѣста, по сравненію съ разбираемыми ниже курса Энрикеса-Амальди и Веронезе. Уголъ линейн (двугранный) опредѣляется, какъ одна изъ двухъ частей, которыя раздѣляются плоскость (пространство) двумя пол прямыми, выходящими изъ одной точки (полуплоскостями, п ходящими черезъ одну прямую). VII-ой Постулатъ *ско женія или сдвига*, а также *вращенія* прямой и плоскости, слѣ ствіемъ изъ котораго является равенство развернуты угловъ. IX-й Постулатъ Архимеда и рядъ теоремъ слѣдствій, съ нимъ связанныхъ, отрѣзки и углы подводя подъ понятія классовъ величинъ. Третій отдѣлъ (на ная съ стр. 25) отводится совмѣстному изученію основны свойствъ круга и шара, и пересѣченіи окружности, зак чивающемуся установленіемъ (путемъ доказательствъ) про ціональности между центральными углами и соотвѣтств

ными имъ дугами, съ одной стороны, и аналогичной зависимостью между сферическими двусторонниками и соотвѣтствующими имъ двугранными углами, съ другой стороны. Четвертый отдѣлъ (стр. 35 — 51) посвященъ совмѣстному же изслѣдованію параллельности прямыхъ и плоскостей, при чемъ признакомъ параллельности прямыхъ, находящихся въ одной плоскости, является ихъ непересѣченіе. Доказывая параллельность такихъ прямыхъ при равенствѣ угловъ, внутреннихъ на-крестъ лежащихъ, авторы «перекладываютъ» отрѣзокъ сѣкущей (такъ, чтобы прежнее начало его совпадало съ прежнимъ концомъ и обратно) заключенный между 2-мя параллельными вмѣстѣ съ соотвѣтствующей частью плоскости, при томъ такъ, чтобы эта часть, находившаяся вправо отъ сѣкущей, была наложена на часть, находившуюся влѣво. Для насъ важно отмѣтить лишь тотъ фактъ, что тутъ при доказательствѣ пользуются (съ полнымъ правомъ) движеніемъ, которое раньше было надлежащимъ образомъ постулировано. По содержанію своему этотъ отдѣлъ мало разнится (но все же разнится) отъ того, что обычно мы находимъ въ соотвѣтственныхъ частяхъ курсовъ планиметріи и стереометріи, если только не забыть, что здѣсь вопросъ трактуется одновременно на плоскости и въ пространствѣ, и что тутъ неминуемо читатель встрѣтитъ нѣкоторыя мелкія интересныя детали, обусловленныя самимъ построеніемъ сочиненія. Въ теоремахъ 53, 54, 55 и 56 устанавливается возможность дѣленія отрѣзковъ (при томъ только однимъ способомъ) на любое число равныхъ частей и раздѣленія на 2, 4, 8 и т. д. равныхъ частей угловъ линейныхъ и двугранныхъ и указываются способы выполненія этихъ построеній.

Въ пятомъ отдѣлѣ (стр. 52—61), аналогично предыдущему четвертому отдѣлу, изучается вопросъ о перпендикулярности прямыхъ и плоскостей (въ частности доказательство перпендикулярности прямой къ плоскости основывается на вращеніи). Разсмотрѣно также построеніе кратчайшаго разстоянія между двумя не пересѣкающимися прямыми, не лежащими въ одной плоскости (что же касается до равен-

ства прямыхъ угловъ, то оно является слѣдствіе равенства развернутыхъ угловъ, а, стало быть, и ихъ половинъ; въ отличіе отъ многихъ обычныхъ доказательствъ съ тѣмъ же ходомъ мысли, здѣсь при всей простотѣ вывода каждый шагъ надлежащимъ образомъ обоснованъ, но это, разумѣется, не единственный путь доказательства равенства прямыхъ угловъ).

На 61-ой страницѣ дается опредѣленіе симметріи относительно точки, оси и плоскости, а также симметріи фигуры относительно ея самой, съ указаніемъ примѣровъ симметріи въ изученныхъ фигурахъ и тѣлахъ.

Въ промежуткѣ между 4-мъ и 5-мъ постулатами дано опредѣленіе однозначнаго соотвѣтствія, которымъ и пользуются въ соотвѣтственныхъ мѣстахъ изложенія, нѣсколько измѣняя обычную формулировку положеній. Не упущенъ изъ виду также вопросъ о направленіи сторонъ угла. Книга заканчивается спискомъ теоремъ (числомъ 33), геометрическихъ мѣстъ (47 вопросовъ) и задачъ (74 задачи), трудность которыхъ такова, что съ ними можетъ справиться средній ученикъ, добросовѣстно проработавшій предшествующія страницы. Эти заключительные вопросы подобраны съ тщательностью и притомъ такъ, что при разрѣшеніи хотя бы даже небольшого числа учащійся найдетъ здѣсь матеріалъ не только для укрѣпленія въ памяти изученныхъ отдѣловъ, но и для послѣдовательнаго ихъ развитія.

Во вторую книгу вошли многоугольники, въ частности треугольники (линіи ломаныя, стороны треугольника и углы, зависимость между ними и т. д.).

Равенство треугольниковъ мы находимъ на стр. 79. затѣмъ идутъ теоремы, относящіяся къ равенству многоугольниковъ; въ общемъ довольно близкое къ обычному разсмотрѣніе параллелограмма, прямоугольника, ромба. Но на страницѣ 94-й мы опять возвращаемся къ пространству трехъ измѣреній и знакомимся съ многограннымъ угломъ. взаимнымъ расположеніемъ его плоскихъ угловъ въ отдѣльныхъ случаяхъ, съ угломъ треграннымъ, признаками равенства угловъ трехгранныхъ, построе-

ніемъ тѣхъ и другихъ, достаточно обстоятельнымъ разсмотрѣніемъ многогранниковъ вообще, пирамидъ и призмъ въ частности.

Удѣливъ еще 4 страницы параллелепипеду (125—128 стр.), авторы переходятъ къ нѣкоторымъ несложнымъ теоремамъ и основнымъ построеніямъ на плоскости и въ пространствѣ (геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ концовъ отрѣзка, отъ двухъ точекъ на плоскости и т. п., опусканіе перпендикуляра на прямую изъ данной точки, дѣленіе угла на плоскости на двѣ равныя части и т. д.).

Приложено къ второй книгѣ 236 теоремъ, предложеній, относящихся спеціально къ геометрическимъ мѣстамъ, и задачъ, также тщательно подобранныхъ, какъ и въ первой книгѣ. Характеръ книги, думается, настолько опредѣленъ указанной выше послѣдовательностью въ распредѣленіи матеріала въ первой книгѣ, что въ дальнѣйшемъ, говоря о содержаніи сочиненія достаточно будетъ отмѣтить лишь нахожденіе въ книгѣ страницъ, на которыхъ разсматриваются вопросы о совокупностяхъ окружностей и совокупностяхъ сферъ (ихъ степени), геометрія на сферѣ, инверсія, общее ученіе о равновеликости и его приложеніяхъ (260—307 стр.), соизмѣримыя и несоизмѣримыя геометрическія величины, вопросъ о подобномъ расположеніи и подобіи и что число всѣхъ дополнительныхъ вопросовъ для самостоятельныхъ работъ учениковъ въ книгѣ равно 1066.

Эта книга можетъ быть полезна для преподавателя:

во 1-хъ, какъ образецъ талантливаго, увѣреннаго, смѣлаго, не поверхностнаго соединенія планиметріи съ стереометріей;

во 2-хъ, какъ руководство, въ которомъ имѣется, помимо богатаго матеріала, много страницъ, гдѣ знакомые намъ по обычнымъ курсамъ, въ нѣсколько отрывочной формѣ, вопросы излагаются особенно сжато и связно;

въ 3-хъ потому, что авторы, пользуясь въ своихъ доказательствахъ время отъ времени движеніемъ (въ томъ смыслѣ, какъ мы понимаемъ движеніе твердыхъ тѣлъ), считаютъ необходимымъ обосновать это движеніе (равно какъ

и всѣ остальные моменты изложенія) соотвѣтственными постулатами. Сверхъ того, они отводятъ движенію ограниченную роль.

4) Въ книгѣ тщательно проведено и выяснено раздѣленіе матеріала на вопросы чисто геометрическіе и тѣ пункты. гдѣ приходится оперировать при помощи числа.

5) Книга при всей простотѣ и конкретности ея основныхъ положеній (постулатовъ) можетъ служить въ средней школѣ примѣромъ системы дедуктивныхъ умозаключеній (интересно также введеніе къ ней).

6) Сочиненіе является, въ силу сказаннаго, учебникомъ доказательнаго курса геометріи, хотя, конечно, нѣтъ надобности брать книгу во всемъ ея объемѣ, особенно въ виду нахожденія въ ней нѣсколькихъ не вполнѣ выдержанныхъ по изложенію мѣстъ.

II. Учебникъ Генрици и Трейтлейна *) состоитъ изъ трехъ частей (отдѣльныя книжки): въ первой содержится планиметрія за исключеніемъ вопроса о подобіи, перспективномъ расположеніи фигуръ и измѣреніи длины периметра правильныхъ многоугольниковъ, длины окружности и площади круга, вошедшихъ вмѣстѣ съ элементами проективной геометріи на плоскости и очень основательнымъ курсомъ тригонометріи, и изученіемъ коническихъ сѣченій во вторую часть (239 страницъ); наконецъ, третья часть содержитъ обычныя главы стереометріи и сферической тригонометріи въ изложеніи соотвѣтствующемъ тому, какое принято въ первыхъ двухъ частяхъ, элементы начертательной геометріи и дополнительное ученіе о коническихъ сѣченіяхъ) всего въ 3-ей части 240 стр.).

На первыхъ 19 страницахъ авторы разсматриваютъ основные геометрическіе образы и возможность возникновенія ихъ посредствомъ движенія, расположеніе двухъ точекъ на прямой и двухъ прямыхъ на плоскости, отрѣзки направленіе прямыхъ, совмѣстимость равныхъ отрѣзковъ, опредѣленіе угла, какъ части плоскости и какъ образа, возникающаго при вращеніи прямой, первыя тео-

ремы относительно смежныхъ и прямыхъ угловъ, опредѣленіе параллельности и характеристика прямолинейныхъ фигуръ на основаніи сторонъ фигуры и ея угловъ; ихъ совмѣстимость, указаніе возможности совмѣстимости плоскихъ фигуръ и ихъ совмѣщенія путемъ слѣдующихъ 4-хъ видовъ движенія: 1) вращенія вокругъ точки въ плоскости самой фигуры; 2) поворота плоскости фигуры вокругъ оси, лежащей въ этой плоскости на два прямыхъ угла; 3) сдвига фигуры въ ея плоскости; 4) вращенія фигуры въ ея плоскости на опредѣленный уголъ. Заканчиваются первыя двѣ главы (19 стр.) разсмотрѣніемъ характера тѣхъ умозаключеній, съ которыми приходится имѣть дѣло въ геометріи, то есть тѣмъ, съ чего книга Лацдери и Бассани начинается. Мы не находимъ также тѣхъ явно выраженныхъ постулатовъ, на которыхъ строятъ свое изложеніе авторы предыдущей книги. Тутъ насъ знакомятъ съ нѣкоторыми образами, а также съ нѣкоторыми пріемами измѣненія положенія этихъ образовъ, молчаливо опираясь при этомъ на нашъ опытъ въ области перемѣщеній твердыхъ тѣлъ въ окружающемъ насъ мірѣ. Но начиная съ третьей главы, при помощи такого, напримѣръ, геометрическаго образа (см. книгу) вскрывается болѣе детально характеръ вращенія фигуры вокругъ точки и сразу чрезвычайно просто и изящно доказывается рядъ теоремъ, и слѣдствій относящихся къ угламъ съ взаимно параллельными и перпендикулярными сторонами. Учащійся долженъ неминуемо увидѣть, что въ его распоряженіи имѣются весьма цѣнные способы изслѣдованія плоскихъ фигуръ, и это представленіе, благодаря мастерскому расположенію авторами матеріала, учащійся можетъ пріобрѣсти основательно изучивъ подъ руководствомъ преподавателя всего 29 первыхъ страницъ!

Равнымъ образомъ поворотъ плоскости фигуры на два прямыхъ угла даетъ поводъ связать это движеніе съ вопросомъ о симметріи относительно оси, что въ свою очередь сопровождается разсмотрѣніемъ съ соотвѣтствующей точки зрѣнія равнодѣлящей угла, прямой перпен-

дикулярной къ отрѣзку и проходящей черезъ его середину и свойствъ элементовъ равнобедренныхъ треугольниковъ, неравныхъ отрѣзковъ въ треугольникѣ, а также его «примѣчательныхъ» точекъ (все это образуетъ главу четвертую 29—38 стр.). Тутъ умѣстно будетъ указать, что въ разсматриваемой книгѣ широко примѣняется съ самаго же начала пріемъ изложенія, основанный на соотвѣтствіи нѣкоторыхъ свойствъ геометрическихъ образовъ, на двойственности, пріемъ широко использованный въ проективной геометріи и въ послѣднее время встрѣчающійся въ нѣкоторыхъ руководствахъ по элементарной геометріи. Пріемъ этотъ изобрѣтенный Жергонемъ, состоитъ въ расположеніи въ два столбца соотвѣтственныхъ опредѣленій и теоремъ. Такъ у нашихъ авторовъ мы найдемъ уже на стр. 15 слѣдующія строки:

на стр. 17:

Три точки, соединенныя тремя прямыми, образуютъ треугольникъ.	Три прямыя, взаимно пересѣкающіяся въ трехъ точкахъ, образуютъ трехсторонникъ.

Въ совмѣстимыхъ фигурахъ:

a) *соотвѣтствующія точки лежатъ на соотвѣтствующихъ прямыхъ.*	a) *соотвѣтствующія прямыя проходятъ черезъ соотвѣтственныя же точки.*
b) *прямой соединяющей двѣ точки соотвѣтствуетъ прямая, соединяющая соотвѣтственныя же двѣ точки.*	b) *Точкѣ пересѣченія (а также углу) двухъ прямыхъ отвѣчаетъ точка пересѣченія* (а также уголъ) *соотвѣтственныхъ прямыхъ.*

Или, скажемъ, на стр. 31, гдѣ рѣчь идетъ о равнобедренныхъ треугольникахъ.

1. Если m равнодѣлящая угла между прямыми a и b, то на этихъ послѣднихъ имѣется рядъ точекъ A и B, которыя при поворотѣ фигуры вокругъ m на два прямыхъ угла попарно совпадаютъ; каждая такая пара точекъ вмѣстѣ съ точкой пересѣченія прямыхъ a и b (точкой C) является концами равныхъ отрѣзковъ. Точки A, B, C образуютъ треугольникъ съ двумя равными сторонами.	1. Если точки A и B расположены на равныхъ разстояніяхъ отъ прямой m, то изъ этихъ точекъ можно провести рядъ полулучей, a и b которые при поворотѣ фигуры на два прямыхъ угла вокругъ m попарно совпадаютъ; каждая такая пара полулучей вмѣстѣ съ отрѣзомъ между A и B (отрѣзкомъ c) образуютъ соотвѣтственно равные углы. Прямыя a, b, c образуютъ трехсторонникъ съ двумя равными углами.

Читатель безъ труда укажетъ много примѣровъ изложенія въ два столбца на послѣдующихъ страницахъ.

Немалый интересъ въ первой книгѣ представляетъ изложеніе вопроса о равновеликости фигуръ *).

Не вдаваясь въ дальнѣйшее описаніе книги отмѣтимъ нѣкоторыя важнѣйшія ея особенности:

1) Со стороны содержанія книга заключаетъ въ себѣ, кромѣ элементарной геометріи, еще тригонометрію плоскости и сферы, начала проективной, аналитической и начертательной геометріи и большое собраніе задачъ.

2) При изложеніи планиметріи авторы не вводятъ соотвѣтственныхъ вопросовъ стереометріи (быть можетъ, это распредѣленіе матеріала было въ свое время нѣкоторой уступкой мнѣнію руководящихъ круговъ германской школы: переводъ книги Лаццери и Бассани на нѣмецкій языкъ выполненъ Трейтлейномъ и въ предисловіи своемъ къ послѣднему сочиненію переводчикъ выражаетъ пожеланіе относительно хотя-бы частичнаго проникновенія въ школу даннаго пріема изложенія).

3) Изложеніе опирается не на явно указанную систему постулатовъ (хотя бы и обширную), но на группу фактовъ связанныхъ съ нашими представленіями о пространствѣ и совершающихся въ немъ движеній.

4) Авторы широко пользуются при изложеніи движеніемъ, но дѣлаютъ это въ превосходной съ педагогической точки зрѣнія формѣ и при томъ такъ, что вся книга производитъ впечатлѣніе чего-то единаго.

5) Съ другой стороны, во всѣхъ вопросахъ изложеніе ведется, такъ сказать, въ направленіи проективномъ.

6) Достаточно отчетливо проведена грань между геометріей измѣренія и геометріей положенія.

7) Весьма интересны для педагога пріемы изложенія, состоящіе въ томъ, что общія положенія время отъ времени даются въ книгѣ лишь послѣ того, какъ

---

[1]) См. статью Дарбу въ сочиненіи Rouse-Ball Histoire des Mathématiques, v. II, p. 236. Парижъ 1907.

разработаны соотвѣтственныя частныя теоремы, а также въ распредѣленіи ряда положеній въ два столбца.

III. Сочиненіе профессора Дижонскаго университета Мерэ, опирающееся на работу геометровъ главнымъ образомъ послѣдняго вѣка, было написано болѣе 35 лѣтъ тому назадъ, когда высказанныя авторомъ соображенія относительно направленія преобразованія преподаванія геометріи не могли быть достаточно оцѣнены ни широкими кругами соотечественниковъ, ни въ другихъ странахъ. Зато послѣднія оффиціальныя программы французской средней школы уже примыкаютъ къ плану, намѣченному Мерэ. Подробное изложеніе первыхъ двухъ книгъ въ нашемъ обзорѣ значительно облегчаетъ намъ характеристику сочиненія Мерэ, т. к. авторы ихъ ярко воплотили въ своихъ учебникахъ идеи, заключающіяся въ послѣдней работѣ, хотя, разумѣется, сочиненіе Мерэ было только частью тѣхъ новыхъ въ дидактическомъ отношеніи работъ, которыми располагали авторы итальянскаго [1]) и нѣмецкаго учебниковъ. Въ соотвѣтствіи съ тѣмъ, что нами только что было сказано, основными идеями Мерэ будутъ— примѣненіе движенія, какъ принципа изложенія, сліяніе планиметріи и стереометріи и (до извѣстной степени) проведеніе проективной точки зрѣнія. Авторъ всюду старается показать, гдѣ находятся корни тѣхъ абстрактныхъ представленій, которыми мы пользуемся въ геометріи и далеко не всѣ приводимыя имъ поясненія стали при помощи соотвѣтственныхъ руководствъ достояніемъ учительскихъ круговъ. У него нѣтъ явно выраженной системы постулатовъ, но, будучи приверженцемъ изложенія, основаннаго на движеніи [2]), онъ позволяетъ себѣ говорить о перенесеніи только послѣ цѣлаго ряда теоремъ; ту же осторожность мы видимъ и въ другихъ мѣстахъ этой работы. Время отъ времени мы встрѣчаемся съ обобщенными предложеніями, связывающимъ сразу въ одно цѣлое такіе образы, какъ, прямую, уголъ, часть плоскости между двумя параллельными прямыми и часть про-

[1]) См. ниже указаніе на статью профессора Веккп.

[2]) Ниже нами будутъ указаны руководства, въ которыхъ понятіе движенія выключено.

странства между двумя параллельными плоскостями... Въ другомъ мѣстѣ мы встрѣчаемся съ такимъ характернымъ выраженіемъ, какъ «вырожденіе трехгранной пирамиды» въ плоскій образъ, гдѣ всѣ четыре ея вершины будутъ лежать въ одной плоскости. Проективная точка зрѣнія особенно ясно выступаетъ въ изложеніи свойствъ фигуръ подобно-расположенныхъ. При всей внутренней стройности и законченности геометрическаго зданія, при множествѣ мѣстъ разработанныхъ настолько, что ихъ можно примѣнить непосредственно къ преподаванію, при множествѣ разсѣянныхъ намековъ на возможность того или другого способа изложенія, сочиненіе Мерэ остается книгой для преподавателя весьма полезной, но и не особенно легкой для чтенія.

Учебники Бореля и Бурле, построенные примѣнительно къ педагогическимъ идеямъ Мерэ, написаны болѣе сжато, чѣмъ книги Бассани и Трейтлейна, не обладаютъ ихъ рельефностью со стороны разработки матеріала въ той мѣрѣ и съ тѣмъ освѣщеніемъ, какія мы желали бы видѣть въ средней школѣ, но заключаютъ небезъинтересныя иллюстраціи. Со стороны содержанія надо отмѣтить въ каждой изъ нихъ нѣсколько вопросовъ тригонометріи, поскольку послѣдніе необходимы при первоначальныхъ вычисленіяхъ элементовъ треугольниковъ.

Книгѣ Бореля предпосланъ краткій обзоръ курса, обзоръ, который однако ни въ какомъ случаѣ нельзя признать достаточнымъ въ качествѣ пропедевтическаго курса. Въ книгѣ Бурле планиметрія отдѣлена отъ стереометріи. Въ книгѣ Бореля часть работы чисто геометрическая предшествуетъ той, въ которой разсматривается вопросъ объ измѣреніи площадей и объемовъ. Очень хорошо изложены въ книгѣ Бурле въ его стереометріи начала начертательной геометріи, которой онъ пользуется какъ при изученіи тѣлъ, такъ и въ теоріи тѣней. Не забыты въ обоихъ учебникахъ коническія сѣченія, а также нѣкоторыя другія кривыя. Въ томъ видѣ, какой учебники эти имѣютъ теперь, они, несмотря на новизну и талантливость изложенія, проигрываютъ по сравненію съ сочиненіями Бассани и

Трейтлейна. При нѣкоторыхъ видоизмѣненіяхъ (вѣроятно, опытъ французской школы укажетъ авторамъ, каковы должны быть эти измѣненія) книги, цѣнныя уже теперь для преподавателя школы (главнымъ образомъ французской) не будутъ вызывать тѣхъ возраженій, какіе невольно возникаютъ у обозрѣвателя теперь.

При описаніи двухъ учебниковъ другого характера мы ограничимся лишь слѣдующими немногими строками, взятыми изъ статьи профессора Векки [1]).

...«Отъ евклидовой системы откололась цѣлая группа руководствъ, выходившихъ въ свѣтъ одно за другимъ, внося въ школу результаты критики основъ геометріи, и, стало быть, болѣе высокую степень точности и строгости. Это теченіе завершается появленіемъ *«Элементовъ Геометріи»* Веронезе [2]). Уже въ своихъ «Основахъ геометріи многихъ измѣреній и многократно именованныхъ прямолинейныхъ единицъ, изложенныхъ въ элементарной формѣ» [3]), опираясь на глубокій анализъ основоначалъ, этотъ извѣстный ученый далъ въ изложеніи своей геометрической системы руководящіе принципы. Въ названныхъ «Началахъ» онъ даетъ (предварительно въ формѣ школьнаго руководства) при помощи точно выполненнаго теоретическаго изслѣдованія, строгое изложеніе и логическое обоснованіе элементарной геометріи. Выключивъ при помощи превосходныхъ по силѣ критическаго анализа соображеній понятіе о движеніи, характеризующее предшествующія руководства, онъ перечисляетъ въ явномъ видѣ всѣ постулаты, которые заложены въ фундаментъ его зданія, и дѣлаетъ обращеніе къ интуиціи, желая тѣмъ освободить мышленіе: онъ отправляется отъ одного единственнаго основного понятія, понятія о точкѣ, изъ котораго логически слѣдуетъ построеніе другихъ геометрическихъ образовъ, причемъ существованіе

---

[1]) Маріо Векки. *Характеристика главнѣйшихъ руководствъ по элементарной геометріи, вышедшихъ въ свѣтъ въ Италіи за послѣднее пятидесятилѣтіе.* См. книгу Юнга. *Какъ преподавать математику.* Спб. 1912. прилож. 1-ое.

[2]) G. Veronese. *Elementi di Geometria.* Падуя. 1897.

[3]) G. Veronese. *«Fondamenti di Geometria a più dimensioni»...* Падуя, 1891. Имѣется нѣмецкій переводъ, выполненный A. Schepp'омъ, Лейпцигъ, 1894.

этихъ послѣднихъ уже нѣтъ болѣе необходимости постулировать. Наиболѣе характерной чертой разсматриваемаго сочиненія является оригинальная теорія равенства, понимаемаго какъ извѣстное соотвѣтствіе; за основное понятіе принята здѣсь совмѣстимость отрѣзковъ; къ нему затѣмъ послѣдовательно приводится совмѣстимость другихъ образовъ. Опредѣленію параллельности и постулату параллельности, которые фигурируютъ у Евклида, авторъ придаетъ форму, болѣе согласную съ выставленнымъ требованіемъ выражать въ постулатахъ только тѣ наблюденія, которыя осуществлены; что касается «фузіонизма», то въ этой книгѣ установлены общія свойства прямой плоскости и пространства, что даетъ автору возможность трактовать затѣмъ одновременно спеціальные вопросы: теорію равенства подобія и измѣренія величинъ. Веронезе, который въ нѣсколько лѣтъ выпустилъ рядъ изданій своего руководства, завершилъ циклъ этого рода книгъ, составивъ учебники геометріи для средней школы различныхъ типовъ въ соотвѣтствіи съ программами 1900 года, внося въ каждый изъ нихъ свое тонкое критическое чутье и большія знанія элементарной геометріи.

Большое сочиненіе профессора Федериго Энрикеса, о которомъ упомянуто выше въ замѣткѣ Маріо Векки и которое включено нами въ настоящій обзоръ, состоитъ изъ 17 работъ, содержащихъ въ себѣ какъ изложеніе крупныхъ наиболѣе теоретическихъ результатовъ, достигнутыхъ геометріей въ 19 столѣтіи, такъ и вопросъ о разнаго рода построеніяхъ, ихъ осуществимости и осуществленіи.

Уже въ 1900 году вышли въ свѣтъ «*Вопросы элементарной геометріи*» Ф. Энрикеса [1]), который въ этой своей книгѣ въ систематической формѣ изучилъ и разобралъ основные вопросы, относящіеся къ предмету сочиненія, опредѣленно удѣляя свое вниманіе требованіямъ педагогическимъ.

Книга, состоящая только изъ оригинальныхъ и чрезвычайно цѣнныхъ статей, была вѣрно задумана и имѣла успѣхъ.

[1]) F. Enriques. „*Questioni rigardanti dela geometria elementare*". Болонья, 1900. Нѣм. переводъ. *Die Fragen der Elementargeometrie*. Берлинъ 1911 г. Есть русскій переводъ 1913 г.

Въ ней приняли участіе ученые и дѣятельные работники; много исключительнаго труда положилъ на эту работу уже знаменитый геометръ Федериго Энрикесъ, бывшій вдохновителемъ и руководителемъ изданія, и стоявшій въ преддверіи своей славы Уго Амальди.

Книга должна служить пособіемъ къ «*Элементамъ геометріи*», выпущеннымъ въ свѣтъ обоими названными авторами въ 1903 году [1]). Особая цѣнность руководства объясняется тѣмъ, что въ немъ съ удивительной гармоніей сочетаются строго научное изложеніе основоначалъ и соблюденіе наиболѣе тонкихъ требованій педагогическаго характера; на смѣну выключеннаго авторами принципа движенія, они вводятъ понятіе о равенствѣ но не только отрѣзковъ, но и угловъ, примыкая такимъ образомъ ко взглядамъ Гильберта, постулаты котораго въ существенныхъ чертахъ тутъ нашли себѣ мѣсто. Конгруэнція другихъ образовъ устанавливается шагъ за шагомъ въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ при помощи соотвѣтственныхъ частныхъ опредѣленій, связывающихъ ее съ конгруэнціей отрѣзковъ и угловъ, которые въ данный образъ входятъ [2]).

Новизна и строгость придается цѣнность также изложенію теоріи равновеликости, которое тутъ представлено въ формѣ совершенно необычной и законченной. Для многоугольниковъ и призмъ сопоставленіе проводится авторами на почвѣ критерія разложимости на равныя части (Дюгамель), а для образовъ плоскихъ и тѣлъ, для которыхъ этотъ критерій (какъ доказалъ Рети, затѣмъ Денъ и въ недавнее время Каганъ) является недостаточнымъ, введено понятіе о равенствѣ протяженій (поверхностныхъ и объемныхъ), что позволяетъ дать строгую, съ точки зрѣнія логики формулировку классическаго процесса *истощенія*, который въ свою очередь пріобрѣтаетъ

---

[1]) F. Enriques U. Amaldi. *Elementi di Geometria.* Болонья 1903 г.

[2]) Среди многихъ деталей книги, характерныхъ своей новизной по сравненію со всѣми предшествовавшими руководствами, надо упомянуть о чрезвычайно изящномъ изложеніи одного вопроса, а именно: на основаніи извѣстной теоремы о равнонаклоненныхъ сѣченіяхъ двуграннаго угла, устанавливаются, независимо отъ постулата параллельности, критеріи равенства трехгранныхъ и многогранныхъ угловъ.

здѣсь изящнѣйшую оболочку. Въ главѣ о пропорціяхъ авторы, оставаясь на почвѣ евклидова опредѣленія, придали теоріи законченность, благодаря которой отвлеченная сторона вопроса доводится до минимума, а выдвигаются отчетливо на первый планъ въ ихъ естественной связи конкретныя геометрическія приложенія. Таковы въ общихъ чертахъ особенности этой книги превосходной и новой, обладающей среди прочихъ своихъ достоинствъ также классической чистотой формы и совершенной прозрачностью изложенія, благодаря которымъ быстро понадобилось одно за другимъ нѣсколько изданій руководства, пользующагося въ школѣ всеобщимъ признаніемъ. Выдающіяся черты описаннаго нами руководства сохранились также въ тѣхъ сокращенныхъ переработкахъ, которыя съ тонкимъ пониманіемъ педагогическихъ требованій авторы написали для различнаго рода среднеобразовательныхъ учебныхъ заведеній; каждое изъ такихъ маленькихъ руководствъ стяжало себѣ прочный успѣхъ»...

Въ книгу Энрикеса «Вопросы элементарной геометріи вошли слѣдующія статьи: 1) о философскомъ значеніи вопросовъ, относящихся къ основоначаламъ геометріи (Энрикесъ); 2) замѣчанія о преподаваніи научной геометріи (Энрикесъ); 3) О понятіи прямой и плоскости (Амальди). 4; Конгруенція и движеніе. О приложеніяхъ постулата непрерывности въ элементарной геометріи (Витали); 6) Ученіе о равновеликости (Амальди); 7) Ученіе о пропорціяхъ (Вальяти); 8) Теорія параллельныхъ линій и неевклидова геометрія (Бонола).

Въ девяти остальныхъ статьяхъ авторы этой энциклопедіи разбираютъ вопросы, относящіеся къ рѣшенію задачъ на построеніе.

Строгое (и доступное для многихъ) научное освѣщеніе всѣхъ названныхъ вопросовъ, пользованіе первоисточниками, творческій характеръ всей дѣятельности авторовъ этихъ статей дѣлаетъ изученіе этой книги для преподавателей весьма желательнымъ, если не обязательнымъ.

Упомянемъ еще только, что статья покойнаго геометра

Бонола по содержанію нѣсколько разнится отъ его главной книги «неевклидова геометрія». Въ энциклопедіи Энрикеса Бонола удѣляетъ большее вниманіе неевклидовымъ построеніямъ.

Не менѣе высокій интересъ представляетъ книга Клейна (часть 2-ая). Не буду приводить теперь ея содержанія, такъ какъ переводъ этого сочиненія долженъ выйти въ свѣтъ въ ближайшемъ времени: въ ней переплетены вопросы элементарной и высшей математики, исторіи преподаванія этихъ областей науки и замѣчанія фактическаго характера.

Наконецъ, слѣдуетъ упомянуть о недавно вышедшей въ свѣтъ *коллективной работѣ* подъ редакціей профессора Дж. В. А. Юнга подъ названіемъ Modern Mathematics. Содержаніе этой послѣдней книги указано въ спискѣ книгъ въ переводѣ названнаго выше сочиненія Юнга «Какъ преподавать математику?»

III. Обзоръ литературы по ариеметикѣ младшихъ и среднихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній.

Докладъ В. Х. Майделя (Спб.)

«Предлагаемый вниманію Съѣзда обзоръ не исчерпываетъ всю учебную литературу названнаго отдѣла ариеметики. Сдѣлать обзоръ всѣхъ вышедшихъ за послѣднее время учебниковъ, не представляется возможнымъ, да и надобности въ этомъ, думается, нѣтъ, такъ какъ многіе учебники различаются между собою не по существу, а въ деталяхъ.

Всѣ учебники можно раздѣлить на двѣ группы: учебники систематическаго курса ариеметики и учебники болѣе или менѣе конспективнаго характера, авторы которыхъ считались при составленіи своихъ учебниковъ съ тѣмъ взглядомъ, что въ самыхъ младшихъ классахъ изученіе ариеметики должно вестись со словъ преподавателя и если нуженъ учебникъ, то только въ видѣ краткаго изложенія основныхъ моментовъ изучаемаго курса въ удобопонятной для ученика формѣ.

Къ учебникамъ первой группы принадлежатъ: «Ариѳметика» В. Ѳ. Гартца, изд. 4-е Спб. 1909 г. «Систематическій курсъ ариѳметики» М. Б. Кюрзена, изд. 3-е. Спб. 1912 г., «Ариѳметика» А. Б. Сахарова, изд. 2-е. Спб. 1910 г., къ разсмотрѣнію которыхъ я и перейду.

Курсъ ариѳметики Гартца состоитъ изъ трехъ частей и прибавленія. Въ первой части изложено ученіе о цѣлыхъ числахъ, во второй—дроби, въ третьей—отношенія и пропорціи и связанныя съ ними задачи и, наконецъ, въ прибавленіи—статья о буквенныхъ доказательствахъ въ ариѳметикѣ и опредѣленіе срока векселя ($1^1/_2$ страничкп). Отмѣчу только особенности курса. Въ первой части, во введеніи, установивъ понятіе о единицѣ, объ одинаковыхъ, различныхъ, именованныхъ и отвлеченныхъ единицахъ, авторъ даетъ опредѣленіе цѣлаго числа, какъ собранія или совокупности единицъ. Чтобы узнать число, надо въ первомъ случаѣ сосчитать единицы, или измѣрить величину—во второмъ.

Въ главѣ о письменномъ счисленіи авторъ устанавливаетъ признакъ для сравненія двухъ чиселъ (стр. 11).

Сложеніе опредѣляется авторомъ, какъ нахожденіе суммы, а сумма — какъ совокупность единицъ всѣхъ слагаемыхъ. (стр. 14).

Въ вычитаніи подчеркивается случай, когда вычитаніе невозможно (изъ меньшаго числа большее), (стр. 18). Приведенъ случай нѣсколькихъ вычитаемыхъ и свойство остатка. (стр. 21). Приведена особая глава о четырехъ дѣйствіяхъ въ совокупности, въ которой авторъ даетъ понятіе о задачѣ, ея рѣшеніи, и о примѣненіи скобокъ, для иллюстраціи чего приводитъ таблицу всѣхъ возможныхъ примѣровъ изъ 2, 3 и 4 данныхъ чиселъ (стр. 61). Приведены свойства О. Н. Д. (стр. 108) и О. Н. К. (стр. 112). Дѣленію на дробь дается двоякій смыслъ: нахожденіе неизвѣстнаго по извѣстной его части и сравненіе (стр. 145).

Имѣется глава о дробяхъ съ дробными числителями и знаменателями (стр. 150). Послѣ § о сравненіи десятичныхъ дробей, дается понятіе о приближенныхъ дробяхъ и о мѣрѣ точности при этомъ (стр. 165). Въ дѣленіи десятичныхъ дро-

бей приведенъ случай дѣленія съ помощью простыхъ дробе (стр. 171). Отношеніе опредѣляется какъ два сравниваемы числа, между которыми находится знакъ дѣленія (стр. 19: Въ главѣ о пропорціональныхъ величинахъ дается понятіе постоянныхъ и перемѣнныхъ величинахъ (стр. 205). . .

Особенности второго изъ названныхъ учебниковъ—«Сис матическаго курса ариөметики»—Кюрзена, заключаются въ сл дующемъ.

Послѣ каждаго отдѣла имѣются вопросы, исчерпываю матеріалъ предшествующаго имъ отдѣла. Дѣйствія обоснов ваются истинами (теоремами), выражающими, положимъ, д суммы, перемѣстительное, сочетательное и т. п. свойства Однако, эти истины формулируются иногда весьма своеобраз такъ, для вычитанія авторъ приводитъ такую истину: «ес два числа разложены на одинаковое число частей такъ, ч части меньшаго числа не превышаютъ соотвѣтственныхъ част большаго, то разность этихъ чиселъ равна суммѣ разност соотвѣтствующихъ частей» (стр. 43). Вычитаніе многозна ныхъ чиселъ авторъ объясняетъ (исходя изъ того, что увел ченіе уменьшаемаго и вычитаемаго на одно и то же число измѣняетъ разности) такъ:

$$\begin{array}{r} 9\;3\;5\;4 \\ -\;3.7.8.9 \\ \hline 5\;5\;6\;5 \end{array}$$

т. е. девять изъ четырнадцати — пять; т. к. мы прибави 10 къ уменьшаемому, то прибавляемъ 10 и къ вычитаемо т. е. вычитаемъ 9 (вмѣсто 8-ми) изъ 15-ти, получаемъ 6 изъ 13-ти—5 и т. д. *) (стр. 49). Послѣ вычитанія дае понятіе о сравненіи двухъ чиселъ въ разностномъ и кратно отношеніяхъ (стр. 53). Примѣняется округленіе дѣлителя п дѣленіи (стр. 101). Подробно перечисляется въ какихъ с чаяхъ (числомъ 5) употребляется устное и письменное дѣле (стр. 108).

Дробь опредѣляется двояко: съ одной стороны дробь е нѣкоторое число одинаковыхъ долей единицы, съ другой

---

*) Такое объясненіе приводится у Бреля въ его «Ариөметикѣ».

частное. Въ главѣ объ отношеніяхъ и пропорціяхъ приведенъ § *о рядѣ равныхъ отношеній* и указано примѣненіе ихъ къ пропорціональному дѣленію. Въ курсѣ въ соотвѣтствующихъ главахъ приведены историческія справки о знакахъ дѣйствій, о мѣрахъ, *о деньгахъ, о времени* и т. п. Имѣется глава о торговлѣ и товариществахъ. Въ приложеніи, *между прочимъ*, обращеніе періодической дроби въ обыкновенную объясняется, какъ нахожденіе предѣла періодической дроби. Тутъ же дается понятіе о непрерывныхъ дробяхъ и объ ирраціональномъ числѣ. Примѣромъ ирраціональнаго числа авторъ даетъ... десятичную періодическую дробь (§ 435). Въ разныхъ частяхъ курса разбросаны (болѣе 40) типичныя задачи съ подробнымъ анализомъ и планомъ ихъ рѣшенія, причемъ этимъ задачамъ даны опредѣленія...

Перехожу къ «Ариѳметикѣ» Сахарова. Главная особенность этого учебника состоитъ въ томъ, что авторъ его нашелъ болѣе методическимъ главу о десятичныхъ дробяхъ помѣстить непосредственно за ученіемъ о цѣлыхъ числахъ, а затѣмъ уже говорить о дробяхъ *обыкновенныхъ*. *Остальныя особенности* выражаются въ слѣдующемъ.

Съ самаго начала курса выясняется понятіе о величинѣ, какъ о томъ свойствѣ предмета, которое можетъ *измѣняться*, увеличиваясь или уменьшаясь.

Дѣйствія обосновываются аксіомами, выражающими свойства суммы, разности и т. д. Статья объ именованныхъ числахъ начинается историческимъ очеркомъ о происхожденіи мѣръ. Въ числѣ мѣръ приведены также мѣры дугъ и угловъ. Статья о рѣшеніи задачъ на время разработана подробнѣе, чѣмъ это вообще принято, строгимъ разграниченіемъ календарныхъ чиселъ и *именованныхъ* чиселъ времени. Въ этой же статьѣ приведена кривая зависимость продолжительности дня отъ времени года, а въ задачахъ на время—таблица, показывающая порядокъ *дня отъ начала года*, въ зависимости отъ числа и мѣсяца.

Въ мѣрахъ площадей приведены наиболѣе употребительныя *плоскія фигуры*, въ мѣрахъ объема—многогранники.

За цѣлыми числами, какъ упомянуто выше, слѣдуетъ

глава о десятичныхъ дробяхъ, которыя разсматриваются, какъ дальнѣйшее развитіе десятичной системы счисленія. Въ этой же главѣ дается понятіе о процентѣ, которое и примѣняется на соотвѣтствующихъ примѣрахъ. Послѣ статьи о періодическихъ дробяхъ очень кратко говорится о приближенныхъ вычисленіяхъ. Въ дополнительныхъ статьяхъ, слѣдующихъ послѣ ученія объ обыкновенныхъ дробяхъ, дается историческій очеркъ о возникновеніи метрической системы, сама система и выясняются ея выгоды; далѣе дается понятіе объ извлеченіи корня.

Здѣсь же дается понятіе объ ирраціональномъ числѣ. Въ отношеніяхъ и пропорціяхъ теоремы доказываются уже на общемъ числѣ. Далѣе идетъ статья о пропорціональныхъ рядахъ, изъ ученія о которыхъ выводятся, какъ частные случаи, производныя пропорціи и рѣшаются задачи на пропорціональное дѣленіе. Здѣсь же въ статьѣ о пропорціональныхъ величинахъ дается понятіе о постоянныхъ и перемѣнныхъ величинахъ и о функціональной зависимости двухъ перемѣнныхъ. Въ концѣ приведена статья о торговлѣ съ правилами товарищества, процентовъ и учета векселей.

Отдѣльно отъ перечисленныхъ учебниковъ стоятъ два учебника: «Ариометика»—Эмиля Бореля, первый циклъ, переводъ съ французскаго, Москва, 1910 г. и та же ариометика Бореля въ обработкѣ Штекселя, изданіе Mathesis, Одесса, 1911 г., въ одной книжкѣ вмѣстѣ съ курсомъ алгебры того же Бореля, которые однако могутъ быть отнесены къ той же группѣ учебниковъ. Упомяну о первой книжкѣ, такъ какъ, въ сущности, обработка Штекселя состояла главнымъ образомъ въ сокращеніи учебника Бореля. (Выпущены статьи о прогрессіяхъ и статьи коммерческой ариеметики).

Подчеркнувъ основное условіе письменной нумераціи, Борель устанавливаетъ понятіе о равенствѣ двухъ чиселъ, на основаніи котораго формулируетъ аксіому числа, состоящую въ томъ, что два данныхъ числа либо равны, либо первое больше или меньше второго.

На основаніи этой аксіомы онъ выводитъ положеніе, что два равныхъ числа въ десятичной системѣ изображаются одинаковыми знаками и наоборотъ, и даетъ признакъ, по которому

можно судить о сравнительной величинѣ двухъ чиселъ, написанныхъ по десятичной системѣ.

Дѣйствія обосновываются теоремами. Эти теоремы суть слѣдствія аксіомы числа. Въ сложеніи эти теоремы выражаютъ перемѣстительное и сочетательное свойства суммы.

Въ вычитаніи доказываются теоремы о вычитаніи суммы и разности и свойства разности. Эти теоремы доказываются на подходящихъ числовыхъ задачахъ.

Въ умноженіи приводятся аналогичныя теоремы.

Разъясняется смыслъ умноженія нуля и на нуль. Обращается вниманіе на смыслъ умноженія въ случаѣ, когда оба сомножителя числа именованныя.

Въ статьѣ о дѣлимости приводятся теоремы о дѣлимости суммы и разности. Въ статьѣ о первоначальныхъ числахъ приведена основная теорема о возможности разложенія всякаго числа только на одно опредѣленное произведеніе первоначальныхъ сомножителей. Дробь разсматривается, какъ результатъ дѣленія.

Опредѣленіе умноженія на дробь не дается.

Дѣленіе опредѣляется, какъ умноженіе на дробь, обратную дѣлителю.

Дается только понятіе о періодической дроби.

Въ статьѣ о квадратномъ корнѣ приведены теоремы о квадратѣ суммы, дроби и т. п. Данъ способъ нахожденія приближеннаго квадратнаго корня съ данною степенью точности.

Имѣется статья объ ариѳметической и геометрической прогрессіяхъ. Выводится сумма первыхъ n нечетныхъ чиселъ, которая доказывается геометрическимъ построеніемъ.

Имѣются статьи коммерческой ариѳметики.

Изъ учебниковъ второй группы назову: «Учебникъ ариѳметики съ изложеніемъ методовъ рѣшеній ариѳметическихъ задачъ»—А. Н. Воробьева, изд. 2-е, Астрахань, 1908 г. и «Курсъ ариѳметики» В. Иванова (Дубравина). Вып. I-й. Цѣлыя и десятичныя числа. Изд. 1911 г. Псковъ.

Разсмотримъ вкратцѣ сперва «Учебникъ ариѳметики» Воробьева.

Въ предисловіи къ своей книгѣ авторъ объясняетъ ска-

тость изложенія курса желаніемъ заставить учителя работать въ классѣ и облегчить ученику домашнюю работу, не уменьшая при этомъ ни научности, ни полноты курса.

Насколько удалось автору достигнуть своей цѣли, рѣшать не буду, а приведу только нѣсколько выдержекъ изъ его курса.

Такъ, напримѣръ, при сокращеніи дробей, авторъ, не говоря ни слова о разложеніи на множители, въ § 142 пишетъ:

«Ясно 504 = 2 . 2 . 3 . 3 . 14» (стр. 33).

На стр. 37 авторъ даетъ такое опредѣленіе умноженію на дробь: «Умножить к. н. число на $^3/_7$, значитъ взять его слагаемыя $^3/_7$ раза, т. е не 1 разъ, а только $^3/_7$ раза... и т. д. въ такомъ же родѣ.

Главная особенность курса, сжатость, доведена до различнаго рода табличекъ, схемъ, условныхъ обозначеній для разъясненія которыхъ учителю дѣйствительно придется много поработать въ классѣ. Приведу два примѣра.

Такъ, для выраженія «измѣненія результатовъ дѣйствій отъ измѣненія факторовъ» приведена такая схема:

dсл.	I сл.		II сл.		см.	dсм.
	6	+	5	=	11	
+7	13	+	5	=	18	+5
+5	17	+	5	=	13	+7
ув.	изм.		пост.		изм.	ув.

dсл. = dсм. (§ 73).

Зависимость суммы и слагаемыхъ выражена такъ:

I сл.	II сл.	сумма	прямая разн. зав.
			обратная разн. зав. (§ 79).

и т. п.

Для перехода отъ ученія о цѣлыхъ числахъ къ десятичнымъ дробямъ удѣлена одна страница для обыкновенныхъ дробей.

Давъ понятіе о приближенномъ значеніи десятичной періодической дроби, авторъ безъ дальнѣйшихъ оговорокъ перехо-

дить къ четыремъ дѣйствіямъ съ періодическими дробями (стр. 40).

Много мѣста отводитъ авторъ въ своемъ учебникѣ рѣшенію задачъ, преимущественно методомъ предположенія, который авторъ считаетъ пропедевтикой къ рѣшенію задачъ помощью уравненій и вообще отдаетъ ему предпочтеніе передъ всякими другими.

Эта сторона учебника разработана авторомъ подробнѣе и лучше другихъ отдѣловъ, почему и представляетъ наибольшій интересъ; однако задачи приводимыя авторомъ содержатъ иногда очень замысловатыя условія.

Другая изъ названныхъ книгъ, «Курсъ ариѳметики»— В. Иванова (Дубравина) отличается еще большею сжатостью. Обнимая собою всего 67 страницъ обычнаго формата учебника, «курсъ» включаетъ въ себя курсъ ариѳметики (за исключеніемъ отдѣла объ обыкновенныхъ дробяхъ), ученіе объ отрицательныхъ числахъ и дѣйствія съ цѣлыми алгебраическими выраженіями. Короче «курсъ» имѣетъ характеръ не конспекта даже, а скорѣе сборника правилъ для производства дѣйствій, т. к. многія изъ нихъ ничѣмъ не обосновываются.

Такъ авторъ, на 2-й страницѣ, находитъ возможнымъ, въ главѣ о письменномъ счисленіи, дать понятіе о десятичномъ числѣ и далѣе всѣ дѣйствія разсматриваетъ одновременно съ цѣлыми и десятичными числами. На 23 страницѣ, въ статьѣ о порядкѣ дѣйствій, дается понятіе и объ отрицательномъ числѣ. Обративъ вниманіе, что при вычитаніи можетъ встрѣтиться случай, когда изъ меньшаго числа придется вычитать большее, напримѣръ 4—7, авторъ говоритъ: «ясно, что дѣйствіе невозможно, но чтобы не дѣлать передъ этимъ остановки, условились въ этомъ случаѣ записывать невыполненное вычитаніе, пишутъ $4-7=-3$, т. е. слѣдуетъ отнять еще 3. Такія числа называются отрицательными, а всѣ остальныя положительными». Дальнѣйшаго расширенія понятія объ отрицательномъ числѣ въ «курсѣ» не имѣется.

Въ статьѣ объ умноженіи дается понятіе о приближенномъ умноженіи, а затѣмъ указаны правила первыхъ трехъ дѣйствій съ одночленами и многочленами. Въ дѣленіи

приводится примѣръ безконечнаго дѣленія, дается понятіе о періодическомъ десятичномъ числѣ, и далѣе всѣ четыре дѣйствія производятся съ десятичными числами точно или приближенно, въ зависимости отъ того, конечная или безконечная десятичная дробь получается во время дѣйствій. Такимъ путемъ авторъ исключаетъ весь отдѣлъ ученія о простыхъ дробяхъ изъ своего курса. Этимъ исчерпывается характеръ учебника г. Иванова.

Въ заключеніе нахожу не лишнимъ упомянуть о двухъ книжкахъ, которыя, по крайней мѣрѣ по заглавію, имѣютъ отношеніе къ курсу ариѳметики младшихъ классовъ.

Говорю «по заглавію», т. к. къ сожалѣнію болѣе полныхъ свѣдѣній дать не могу, умолчать же объ нихъ не считалъ себя въ правѣ: эти книги затрагиваютъ назрѣвшіе вопросы и потому, независимо отъ ихъ достоинства, вызываютъ къ себѣ извѣстный интересъ. Одна изъ нихъ «Введеніе въ алгебру (ариѳметическая подготовка»)—Н. Панова и Т. Сотеренко, изд. 1910 г. Одесса; другая—«Опытъ приложенія графики въ области преподаванія начальной ариѳметики»—Каминскаго, изд. 1909 г. Кременчугъ».

IV. Обзоръ 4-хъ учебниковъ по ариѳметикѣ.

Докладъ Л. Н. Тяпкиной (Спб.).

«По порученію предсѣдателя первой секціи М. Г. Попруженко я разсмотрѣла четыре учебника ариѳметики:

1.—*Б. Чиханова*. Учебникъ ариѳметики (курсъ среднихъ учебныхъ заведеній), 7-е изд., (142 стр.), Минскъ. 1912 г., ц. 60 коп.; (6-е изд. Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія допущено, какъ руководство для среднихъ учебныхъ заведеній Министерства).

2.—*А. Тумермана* (препод. Торговой Школы). Краткій курсъ ариѳметики (для городскихъ училищъ и младшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній). Спб., 1911 г., (121 стр.). ц. 30 коп.

3.—*М. Хрущинскаго* (препод. Коммерческаго училища въ Спб.). Краткій учебникъ ариѳметики (курсъ I, II и III кл. среднихъ учебныхъ заведеній) Спб., 1911 г., (135 стр.), ц. 70 коп.

4. — *К. Н. Рашевскаго* (препод. Московскаго реальнаго училища). Краткій курсъ ариѳметики (для среднихъ учебныхъ заведеній), 3-е изд., (94 стр.). Москва, 1911 г., ц. 30 коп.

Учебникъ Чиханова отъ обычныхъ систематическихъ курсовъ отличается тѣмъ, что содержитъ, кромѣ полнаго основного курса, особенности котораго будутъ указаны ниже, рядъ историческихъ свѣдѣній и нѣсколько интересныхъ добавочныхъ статей:

1. — Приближенныя вычисленія ($5^1/_2$ стр.). На примѣрахъ разъясняются правила нахожденія суммы, разности, произведенія и частнаго съ данною степенью точности.

2. — Ариѳмометры (2 стр.). Дается краткое описаніе ариѳмометра Однера (изображ. въ треть своей величины) и объясняется, какимъ образомъ производится на немъ вычисленіе произведенія: 89026×17612.

3. — Общій обзоръ ариѳметическихъ дѣйствій (2 стр.). Образованіе натуральнаго ряда чиселъ и его свойства. Опредѣленіе суммы. Обоснованіе дѣйствій: сложенія, умноженія и возвышенія въ степень на понятіи суммы. Противопоставленіе каждому изъ вышеупомянутыхъ дѣйствій двухъ обратныхъ.

4. — Происхожденіе и развитіе понятія о числѣ (1 стр.). Краткая исторія развитія первоначальныхъ ариѳметическихъ знаній.

5. — Къ ученію объ именованныхъ числахъ ($2^1/_2$ стр.). Допустимость именованнаго множителя.

Особенности основного курса:

1) Кромѣ описанія различныхъ системъ счисленія, приводятся обозначенія нѣсколькихъ чиселъ по двоичной системѣ, описанной въ книгѣ «Іекимъ», приписываемой древнѣйшему Китайскому императору Фохи.

2) Опредѣленію дѣйствія сложенія, какъ чиселъ цѣлыхъ, такъ и дробныхъ, предшествуетъ опредѣленіе суммы.

3) Послѣ обычнаго способа вычитанія многозначныхъ чиселъ указывается способъ вычитанія путемъ дополненія единицъ каждаго изъ разрядовъ вычитаемаго до числа единицъ соотвѣтствующаго разряда уменьшаемаго.

4) Повѣрка «числомъ 9» дѣйствій сложенія и вычитанія.

5) Описаніе индусскаго способа умноженія.

6) Предложенный Коши способъ для производства дѣйствія умноженія и его повѣрки.

7) Способъ дѣленія помощью дополненій.

8) Въ отдѣлѣ, озаглавленномъ «особенности при рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ», помѣщены рѣшенія нѣсколькихъ задачъ способами названными: способомъ предположенія. способомъ приведенія къ единицѣ, способомъ отношеній, способомъ сравненія оборотовъ, способомъ подстановки.

9) Выводъ признака дѣлимости на 9 основывается на предварительномъ разъясненіи, что всякое число равно кратному 9, сложенному съ суммою его цыфръ.

10) Послѣ обычнаго вывода всѣхъ признаковъ дѣлимости указано, какимъ образомъ наиболѣе употребительные признаки дѣлимости могутъ быть выведены довольно просто и однообразно изъ равенства:

$$N=a+10b+100c+\ldots$$

11) Указывается свойство всякаго первоначальнаго числа, уменьшеннаго или увеличеннаго на единицу, дѣлиться на 6.

12) Способъ повѣрки умноженія и дѣленія числомъ 9 и 11.

13) Въ отдѣлѣ дѣйствій съ дробными именованными числами для рѣшенія примѣра и двухъ задачъ примѣняется раскладочный способъ умноженія, называемый также итальянскимъ или Вельта.

14) Въ отдѣлѣ умноженія десятичныхъ дробей приводится способъ расположенія вычисленій, предложенный Лагранжемъ.

15) Въ отдѣлѣ «тройныя правила» указывается, какъ избѣжать тѣ несообразности, къ которымъ приводитъ рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ этого типа способъ приведенія къ единицѣ.

16) Въ статьѣ о процентахъ и учетѣ векселей даются свѣдѣнія изъ Коммерческой ариѳметики (вычисленіе процентныхъ денегъ способомъ процентныхъ нумеровъ, понятія объ акціяхъ, облигаціяхъ и др. проц. бумагахъ, биржи, банки).

17) Въ концѣ книги помѣщены: таблица разложенія на первоначальныхъ дѣлителей нѣкоторыхъ составныхъ чиселъ, таблица первоначальныхъ чиселъ (1—2000) и таблица для вычисленія сложныхъ процентовъ.

Учебники Тумермана и Хрущинскаго носятъ названія «Краткихъ курсовъ» и отличаются отъ «систематическихъ», главнымъ образомъ, тѣмъ, что не содержатъ тѣхъ дополнительныхъ статей теоретическаго курса ариѳметики, которыя проходятся въ старшихъ классахъ (кромѣ того и въ систематическихъ курсахъ печатаются обыкновенно мелкимъ шрифтомъ). Оба эти учебника заключаютъ въ себѣ всѣ основныя опредѣленія и правила ариѳметики съ объясненіями и примѣрами, а также и рѣшенія задачъ на тр. пр., проц., учетъ векс., пропорц. дѣл., цѣпное пр. и смѣшеніе; ничѣмъ существеннымъ въ изложеніи этого матеріала они не отличаются отъ обычныхъ курсовъ; можно указать только на нѣкоторыя особенности въ деталяхъ.

Такъ въ учебникѣ Тумермана:

1) Вопросъ объ измѣненіи суммы, разности, произведенія и частнаго выдѣленъ въ особую главу, причемъ разсматриваются измѣненія суммы и разности не только при измѣненіяхъ данныхъ чиселъ на нѣсколько единицъ, но и въ нѣсколько разъ, а измѣненія произведенія не только при измѣненіяхъ множимаго и множителя въ нѣсколько разъ, но и при измѣненіи ихъ на нѣсколько единицъ.

2) Подробно излагаются отношенія и пропорціи, какъ геометрическія, такъ и ариѳметическія.

3) Для наглядности характеръ пропорціональности между капиталомъ, проц. таксой, срокомъ и проц. деньгами изображается на чертежѣ, который легко запоминается. Для рѣшенія

задачъ на проц. составляются и формулы, опредѣляющія каждую изъ величинъ черезъ остальныя.

4) Приложеніе содержитъ главы:

a) Различныя системы счисленія.

b) Упражненія для усвоенія метрической системы мѣръ.

c) Вопросы для повторенія, исчерпывающіе въ порядкѣ изложенія курса все его содержаніе до мельчайшихъ подробностей.

Въ учебникѣ Хрущинскаго:

1) Каждое изъ 4-хъ дѣйствій надъ цѣлыми отвлеченными числами излагается такъ:

a) Опредѣленіе.

b) Зависимость между данными и искомымъ.

c) Свойства искомаго числа.

d) Дѣйствія надъ однозначными числами.

e) Обоснованіе и выводъ правила дѣйствія для многозначныхъ чиселъ.

f) Примѣненіе дѣйствія.

2) Для наглядности на отрѣзкахъ прямыхъ иллюстрируется:

a) Сравненіе дробей съ одинаковымъ числителемъ.

b) Сравненіе дробей съ одинаковымъ знаменателемъ.

c) Измѣненіе величины дробей съ измѣненіемъ ея членовъ.

d) Неизмѣняемость величины дробей при приведеніи ея къ иному знаменателю.

3) За отдѣломъ: «Цѣлыя именованныя числа и дѣйствія надъ ними» слѣдуетъ отдѣлъ: «Подраздѣленіе задачъ на типы и способы рѣшенія ихъ» (9 страницъ). Въ предисловіи къ учебнику авторъ пишетъ, что онъ вводитъ этотъ отдѣлъ потому, что придаетъ большое значеніе «умѣнію рѣшать задачи», а этого, по его мнѣнію, можно достичь не количествомъ рѣшенныхъ задачъ, но систематическимъ изученіемъ встрѣчаемыхъ чаще типовъ.

Отдѣлъ этотъ распадается на слѣдующіе параграфы:

1) Зависимость между величинами; задачи: простыя и сложныя.

2) Выводныя задачи (6 группъ).

3) Задачи на предположеніе (6 группъ).

Въ каждой группѣ одинъ или нѣсколько типовъ; всѣ типы перечисляются, но не приводится ни одной задачи съ числами, а лишь указывается, какія величины задаются и какіе вопросы составляются для рѣшенія.

Напримѣръ, одинъ изъ типовъ таковъ: «Дается: 1) разстоянія, проходимыя каждымъ лицомъ или тѣломъ въ опредѣленное время; 2) время, по истеченіи котораго одно лицо или тѣло догнало другое; отыскивается: первоначальное разстояніе, отдѣляющее двухъ лицъ. Составляютъ вспомогательныя задачи: 1) Найти разстояніе, проходимое каждымъ лицомъ или тѣломъ въ единицу времени (2 вопр.); 2) узнать разницу въ скоростяхъ; 3) опредѣлить первоначальное разстояніе, отдѣляющее двухъ лицъ, два движущихся тѣла.

Учебникъ Рашевскаго, первое изданіе котораго носило названіе: «Правила и опредѣленія ариѳметики» отличается отъ другихъ «краткихъ курсовъ ариѳметики» для младшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Выпущены длинныя правила, какъ нумераціи, такъ и дѣйствій съ многозначными отвлеченными и составными именованными числами. Дается лишь таблица съ распредѣленіемъ разрядовъ по классамъ и рѣшаются примѣры на каждое дѣйствіе. Правила для нахожденія наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго даются безъ доказательствъ, перечисляются лишь основныя истины, на которыхъ основывается дѣлимость чиселъ. Нахожденіе части отъ числа и числа по его части разсматриваются уже послѣ дѣйствій умноженія и дѣленія на дробь, а потому и рѣшаются прямо этими дѣйствіями.

Изъ дѣйствій съ дробными именованными числами приводится только рѣшеніе двухъ простыхъ примѣровъ: на превращеніе и раздробленіе.

Опредѣленію процента въ коммерческомъ смыслѣ предшествуетъ общее опредѣленіе процента, какъ сотой доли, обращается вниманіе на то, какую часть даннаго числа составляютъ: 50%, 25%, 75% и т. п.

Выраженія:

$$0 \times 25 = 0; \qquad 25 \times 1 = 25; \qquad 5 : 1 = 5$$
$$25 \times 0 = 0; \qquad 1 \times 25 = 25; \qquad 5 : 5 = 1$$

выдѣлены въ особый параграфъ, какъ особые случаи умноженія и дѣленія.

Вопросу о постановкѣ наименованій отводится отдѣльная статья, въ которой подчеркивается, что множитель всегда долженъ быть отвлеченнымъ числомъ, но предлагается, для удобства вычисленій, записывать иногда множитель надъ множимымъ.

Такъ, напримѣръ:

354 руб.		множитель
×4 »		множимое
1416 руб.		

Отдѣлъ дѣйствій надъ обыкновенными и десятичными дробями заканчивается главами: о приближенномъ частномъ, обращеніемъ обыкновенныхъ дробей въ десятичныя, обращеніемъ періодическихъ дробей въ обыкновенныя. Послѣдняя глава: «Приложеніе ариѳметики». содержитъ краткія свѣдѣнія о геометрическомъ отношеніи и пропорціяхъ.

Затѣмъ приводятся рѣшенія простѣйшихъ задачъ на правила: тройное (простое и сложное), проценты, пропорціональное дѣленіе и смѣшеніе.

Всѣ опредѣленія и правила напечатаны курсивомъ. Чтобы обратить вниманіе ученика на тѣ выраженія въ нихъ, которыя должны быть особенно отмѣнены, эти послѣднія отпечатаны болѣе жирнымъ шрифтомъ, что придаетъ изложенію особую выпуклость».

V. Обзоръ литературы на русскомъ языкѣ по методикѣ ариѳметики.

Докладъ[1]) В. Р. Мрочека (Спб.).

«По порученію Организаціоннаго Комитета имѣю честь предложить вниманію собравшихся обзоръ литературы на русскомъ языкѣ по вопросамъ преподаванія ариѳметики.

Подъ «методикой ариѳметики» обыкновенно подразумѣваются тѣ ходячія книжки, въ которыхъ разсматриваются вопросы обученія ариѳметикѣ въ русскихъ начальныхъ школахъ. Громадное большинство авторовъ совершенно не касается при этомъ вопросовъ дидактики и все свое вниманіе устремляетъ на разработку деталей курса. При этомъ, конечно, имѣется ввиду лишь начальная школа, а о существованіи школъ другихъ типовъ, гдѣ тоже проходится ариѳметика, авторы повидимому забываютъ.

Въ настоящее время педагогика математики существуетъ, какъ самостоятельная научная дисциплина; ея задача—«классифицировать[2]) собранный математическій матеріалъ, отдѣлить общедоступные элементы отъ предметовъ роскоши, найти средства и пути для сообщенія этихъ элементовъ наибольшему числу лицъ при наименьшей затратѣ индивидуальныхъ усилій ума и воли».

Отсюда слѣдуетъ, что къ каждому отдѣлу математики, предназначенному для школы, необходимо предъявлять подобныя же требованія. Такъ, прежде чѣмъ приступить къ методикѣ отдѣльныхъ частей ариѳметики, необходимо обосновать: 1) цѣль школьной ариѳметики, 2) ея мѣсто въ ряду другихъ учебныхъ предметовъ, 3) ея содержаніе въ связи съ тѣмъ или инымъ типомъ школы, 4) планъ распредѣленія матеріала по годамъ обученія, 5) распредѣленіе матеріала по отдѣльнымъ

[1]) Настоящій докладъ представляетъ конспективное изложеніе одной главы изъ готовящихся къ печати моихъ «Лекцій по педагогикѣ ариѳметики».

[2]) В. Мрочекъ и Ф. Филипповичъ, Педагогика математики, т. I, 1910, стр. 2.

періодамъ школьнаго года и 6) главныя методы разработки ариѳметики въ школѣ. При такомъ обоснованіи приходится постоянно опираться какъ на эволюцію ариѳметики научной, такъ и на многочисленныя экспериментально-научныя изслѣдованія въ области школьной ариѳметики и ея методики; приходится опираться на экспериментальную педагогику, дѣтскую психологію, психофизіологію и гигіену; наконецъ, приходится считаться и съ чисто соціальными проблемами, какъ-то: назначеніе школы того или иного типа, общеобразовательныя или утилитарныя тенденціи, доступность школы для тѣхъ или иныхъ классовъ общества и т. п.

При разработкѣ вопросовъ школьной ариѳметики необходимо, кромѣ того, имѣть въ виду еще: а) исторію развитія ариѳметики у отдѣльныхъ народовъ и у всего человѣчества, б) ея неизбѣжныя и непосредственныя приложенія во внѣшкольной жизни.

Пользуясь установленнымъ масштабомъ, я разсмотрю существующую на русскомъ языкѣ литературу по методикѣ ариѳметики.

Въ существующей методической литературѣ можно различать три направленія: эмпирическое, переходное и экспериментальное.

А. Эмпирическое направленіе.

Въ основу построенія методики положены не научные, дидактическіе и психологическіе принципы, а «голый опытъ». Каждый изъ авторовъ добавлялъ свои эмпирическія крупицы къ той массѣ крупицъ, которая составилась до него трудами отдѣльныхъ эмпириковъ XVIII и XIX столѣтій. Отдѣльныя детали часто вѣрны; иныя замѣчанія практическаго характера предвосхищаютъ выводы экспериментальной дидактики; но общій характеръ изложенія совершенно не удовлетворяетъ поставленнымъ выше требованіямъ.

Къ этому направленію принадлежатъ:

1) *Аржениковъ, К. П.* Методика начальной ариѳметики.

2) *Белюстинъ, В. К.* Методика ариѳметики.

3) *Вишневскій, Г. М.* Записки по методикѣ элементарной ариѳметики.

4) *Гольденбергъ, А. И.* Методика ариѳметики.

5) » Бесѣды по счисленію.

6) *Евтушевскій, В.* Методика ариѳметики.

7) *Житковъ, С. В.* Методика ариѳметики.

8) *Куперштейнъ, В. М.* Записки по методикѣ ариѳметики.

9) *Латышевъ, В. А.* Руководство къ преподаванію ариѳметики.

10) *Лубенецъ, Т.* Методика ариѳметики.

11) *Павловъ,* Методика ариѳметики.

12) *Шохоръ-Троцкій, С. И.* Методика ариѳметики.

и др.

В. Переходное направленіе.

Авторы второй категоріи въ большинствѣ случаевъ уже знакомы съ новой постановкой вопроса; они отчасти вводятъ экспериментальныя изслѣдованія, отчасти считаются съ научными данными; нѣкоторые изъ нихъ обращаютъ вниманіе и на исторію вопроса.

Сюда относятся:

13) *Дожъ, Ф.* Методологія ариѳметики, пер. съ франц., 1886 г.

14) *Енько, П.* Лабораторный методъ обученія начальному счету, 1911.

15) *Литвинскій, П. А.* Изученіе ариѳметики дѣтьми, 1908.

16) *Мукаловъ, Н.* Записки по методикѣ ариѳметики, 1910.

17) *Шохоръ-Троцкій, С. И.* Методика ариѳметики. Для учителей средн. уч. заведеній, 1912.

18) *Штеклинъ І.* Методика ариѳметики, пер. съ нѣм. Ч. І, 1911, ч. ІІ, 1912.

и др.

С. Экспериментальное направленіе.

Пока единственнымъ крупнымъ представителемъ научно поставленной методики ариѳметики является Лай, книга котораго переведена на русскій яз. Къ сожалѣнію, въ книгѣ Лая разработаны лишь вопросы, относящіеся къ обученію ариѳметикѣ въ предѣлахъ перваго десятка и намѣчены детали разработки первой сотни и тысячи. По общій планъ изслѣдованія, обоснованіе начальныхъ принциповъ, широкое примѣненіе экспериментальнаго метода—все это ставитъ книгу Лая въ образецъ всѣмъ дальнѣйшимъ авторамъ методикъ.

Изъ русскихъ авторовъ необходимо отмѣтить Галанина, книга котораго вышла въ трехъ частяхъ; третья часть содержитъ попытку болѣе широкаго обоснованія методики.

Изъ иностранныхъ авторовъ, писавшихъ спеціально по ариѳметикѣ, переведены Герляхъ и Вентвортъ и Ридъ. Книжка Герляха характерна среди нѣмецкихъ методикъ: вмѣсто скучнѣйшихъ деталей и утомительныхъ разжевываній она даетъ общую схему изложенія и на этомъ фонѣ, какъ отдѣльныя иллюстраціи, являются тѣ или иныя детали курса. Американскій же учебникъ Вентворта и Рида задается чисто практическими цѣлями: дать хорошо проработанный матеріалъ, съ которымъ учитель справится самъ. Методика тѣхъ же авторовъ—это расширенный ихъ же учебникъ. Такое направленіе американскихъ методистовъ станетъ понятнымъ, если вспомнить, что еще въ 1907 г. было 528 каѳедръ педагогики въ Университетахъ, Колледжахъ и Учительскихъ Институтахъ и Семинаріяхъ Соед. Штатовъ: весь центръ тяжести подготовки учительскаго персонала переносится на учебныя заведенія. Въ Россіи до сихъ поръ каждый практикъ долженъ самъ заботиться о своемъ профессіонально-педагогическомъ образованіи.

Въ нижеслѣдующемъ перечнѣ я укажу не только книги по методикѣ математики вообще, но и тѣ журнальныя статьи, въ которыхъ отразились новыя теченія въ области школьной ариѳметики. Въ настоящее время «учитель ариѳметики»—это пережитокъ старины. Книги Клейна, Лезана, Юнга и др. показываютъ, чѣмъ долженъ заниматься учитель на урокахъ ариѳметики, что́ онъ долженъ знать самъ и чему учить другихъ.

19) *Алексѣевъ, В.*, проф. Учебникъ разумной математики, Вышній Волочекъ, 1908, ц. 1 р. 20 к.

20) *Burnham*, проф. Гигіена ариѳметики, какъ учебнаго предмета, пер. съ англ. Журналъ «Народное Образованіе», 1911, кн. 7 и 8.

21) *Вентвортъ и Ридъ,* Начальная ариѳметика, ч. I и II, пер. съ англ. подъ ред. В. Р. Мрочека, изд. «Новая Школа», Спб. 1911, ц. 60 к.

22) *Галанинъ, Д.* Методика ариѳметики, и Введеніе, 1910—11, ц. 1 р. 80 к.

23) *Герляхъ, А.* Какъ преподавать дѣтямъ ариѳметику въ духѣ творческаго воспитанія, пер. съ нѣм., 1910—11, ц. 35 к.

24) *Клейнъ, Ф.* проф. Вопросы элементарной и высшей математики, т. I, пер. съ нѣм., 1912, ц. 3 р.

25) *Лай, В. А.* Руководство къ первоначальному обученію ариѳметикѣ, основанное на результатахъ дидактическихъ опытовъ, пер, съ нѣм., 1910, ц. 80 коп.

26) *Лезанъ, Шарль*, проф. Введеніе въ математику, пер. съ франц. подъ редак. В. Р. Мрочека, изд. «Герольдъ», Спб. 1912, ц. 30 коп.

27) *Лоджъ, Оливеръ*, проф. Легкая математика, преимущественно ариѳметика, пер. съ англ., 1909, ц. 1 р. 60 к.

28) *Мрочекъ, В. и Филлиповичъ, Ф.* Педагогика математики, т. I, 1910, ц. 1 р. 50 к.

29) *Мрочекъ, В.* Ариѳметика въ ея настоящемъ и прошломъ. Журналъ «Обновленіе Школы», 1911, кн. I и III.

30) *Пуанкарэ*, проф. Наука и методъ, пер. съ фр., 1910, ц. 1 р. 50 к.

31) *Радосавльевичъ, П.*, пр.-доц. Экспериментальныя изслѣдованія психическихъ процессовъ въ математикѣ, какъ наукѣ и какъ учебномъ предметѣ. Журналъ «Обновленіе Школы», 1911—12—13, кн. 5 и слѣд.

32) *Туфановъ, Ал.* Обученіе ариѳметикѣ въ предѣлѣ перваго десятка. Журналъ «Обновленіе Школы», 1912, кн. 5.

33) *Юнгъ, Дж.*, проф. Какъ преподавать математику? Пер. съ англ., 1912, ц. 3 р.».

Второе засѣданіе

30 декабря 8 час. веч.

Предсѣдательствовалъ Б. Б. Піотровскій.

VI. Современное состояніе курса геометріи въ средней школѣ въ связи съ обзоромъ наиболѣе распространенныхъ учебниковъ.

Докладъ Н. А. Извольскаго (Москва).

«Я позволю себѣ начать свой докладъ словами маститаго французскаго ученаго Г. Пуанкаре:

«Чѣмъ объяснить, что многіе умы отказываются понимать математику? Не парадоксально ли это? Въ самомъ дѣлѣ, вотъ наука, которая аппелируетъ только къ основнымъ принципамъ логики. . . . . ,—и все же встрѣчаются люди, которые находятъ эту науку темной! И этихъ людей даже большинство! Пусть бы они оказались неспособными изобрѣтать,—это еще допустимо. Но они не понимаютъ доказательствъ, которыя имъ предлагаютъ и т. д.». (Г. Пуанкаре. «Наука и Методъ». Переводъ подъ ред. И. К. Брусиловскаго).

Далѣе Пуанкаре анализируетъ понятіе «пониманіе», и желающіе могутъ найти много интереснаго на страницахъ указанной книги, посвященныхъ «математическому разсужденію».

Но оставимъ Пуанкаре и обратимся къ современному курсу геометріи и къ учебникамъ, которые являются выразителями этого курса, съ цѣлью разобраться, нѣтъ ли въ этомъ курсѣ причинъ, хотя бы отчасти объясняющихъ «непониманіе математики» или, по крайней мѣрѣ, показывающихъ, что благодаря современному состоянію нашего курса геометріи (я го-

ворю только о геометріи) число «непонимающихъ геометрію» должно увеличиваться.

Необходимо остановиться на фактахъ, характеризующихъ проявленія логики въ нашемъ курсѣ геометріи.

Вообще говоря, логика можетъ и должна проявляться въ курсѣ геометріи двояко:

1) въ логичномъ построеніи всего курса, направляемомъ руководящими мыслями, положенными въ основу курса,—это, такъ сказать, внутреннее проявленіе логики;

2) въ видѣ ряда силлогизмовъ, которыми доказываются теоремы.

Полагаю, что я не ошибусь, что авторы нашихъ обычныхъ учебниковъ и все, регулируемое этими учебниками, обученіе геометріи главное вниманіе обращаютъ на второе проявленіе логики. Подтвержденіе этого я вижу во многихъ программахъ, въ которыхъ на первый планъ выдвигается развитіе формальнаго мышленія учащихся.

Съ моей точки зрѣнія первое проявленіе логики въ курсѣ геометріи неизмѣримо цѣннѣе второго. Здѣсь мало, чтобы послѣдующее опиралось на предыдущее, здѣсь надо стремиться къ идеалу стройности курса: введеніе въ курсъ новыхъ объектовъ, комбинированіе ихъ, обобщеніе основныхъ понятій должно быть выполнено по строго логическому плану. Тогда эта сторона курса окажетъ доминирующее вліяніе на развитіе учащихся и вліяніе неизмѣримо большее, чѣмъ отъ проведенія требованія, чтобы все, что не аксіома, доказывалось. Эта стройность плана повлечетъ за собою развитіе у учащихся потребности примѣнять къ изученію геометріи логику; навыкъ въ построеніи силлогизмовъ само-собою, безъ навязыванія его учащимся, займетъ въ курсѣ надлежащее мѣсто, такъ какъ учащіеся сами почувствуютъ и необходимость формальной логики и пользу ея.

Несмотря на то, что авторы нашихъ учебниковъ большее вниманіе обращаютъ на второе проявленіе логики, все же, какъ это ни удивительно, имѣются вкоренившіяся въ нашъ курсъ геометріи ошибки даже и противъ этого проявленія логики.

Къ выясненію этихъ ошибокъ я теперь и приступаю.

II.

Общеизвѣстна теорема: «сумма двухъ смежныхъ угловъ равна $2d$». Для доказательства этой теоремы пишется рядъ равенствъ, приводится рядъ разсужденій, но оказывается, что здѣсь. . . . нѣтъ матеріала для доказательства.

Для выясненія этого наиболѣе удобно перенести вопросъ на строго-логическую почву, отказавшись отъ тѣхъ образовъ, съ которыми мы связываемъ мысль, выражаемую этою «теоремою». Для этой цѣли слѣдуетъ воспользоваться символами.

Имѣемъ классъ объектовъ: a, b, c, d, e. . . . , которые мы называемъ углами и относительно которыхъ надо доказать, что $a+b=2d$, гдѣ a и b суть два объекта этого класса, особеннымъ образомъ выбранные, а d есть объектъ этого же класса, обладающій особыми признаками.

Всѣ объекты нашего класса удовлетворяютъ слѣдующимъ постулатамъ: 1) постулатъ сложенія: для всякихъ двухъ объектовъ a и b возможно найти въ этомъ же классѣ третій объектъ, называемый суммою двухъ первыхъ, т. е. возможно найти $a+b$; 2) $2d$ значитъ $d+d$; 3) надо перевести образное представленіе смежныхъ угловъ на символы. Обычное опредѣленіе смежныхъ угловъ [смежными углами называются два угла, имѣющіе (общую вершину), одну общую сторону, а двѣ другихъ стороны которыхъ образуютъ одну прямую] въ связи съ образнымъ процессомъ сложенія угловъ возможно перевести на символы въ такой формѣ: въ условіи теоремы даны два такихъ объекта a и b, что ихъ сумма равна нѣкоторому особому объекту c; 4) надо сдѣлать подобный же переводъ на символы для прямого угла, обозначаемаго знакомъ d. «Прямымъ угломъ называется одинъ изъ двухъ равныхъ смежныхъ угловъ», т. е. символъ d есть такой особенный объектъ нашего класса, что $d+d=c$ (на основаніи 3) или (на основаніи 2) $2d=c$.

Все доказательство сводится тогда къ тому, что къ двумъ даннымъ посылкамъ: $a+b=c$ и $2d=c$ надо присоединить третью: два объекта (обыкновенно говорятъ «двѣ величины»),

порознь равные третьему, равны между собою, и заключить отсюда «слѣдовательно $a+b=2d$».

Но въ нашихъ наиболѣе распространенныхъ учебникахъ даже и этого дѣлать не приходится. Въ самомъ дѣлѣ, тамъ избѣгается введеніе въ курсъ геометріи того особеннаго угла, который обозначенъ символомъ c (въ нѣкоторыхъ учебникахъ вводится этотъ особенный уголъ, называемый развернутымъ, или выпрямленнымъ, но эти учебники почти не употребляются въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ); разъ этотъ уголъ не входитъ въ курсъ, а взамѣнъ его вводятъ лишь одинъ особый уголъ прямой, названный символомъ d, то намъ остается 4-ый постулатъ выкинуть, а 3-ій измѣнить: данные въ условіи теоремы символы a и b связаны между собою соотношеніемъ $a+b=2d$. Что же тогда доказывать? Содержаніе теоремы вовсе исчезаетъ.

А сколько трудовъ затрачиваютъ несчастные ученики— и это въ самомъ началѣ курса,—чтобы быть въ состояніи воспроизвести самимъ доказательство этой теоремы съ нулевымъ содержаніемъ!

Вмѣсто того, чтобы изучать доказательство этой якобы теоремы, слѣдовало бы выполнять рядъ упражненій, пріучающихъ учениковъ видѣть сумму двухъ или нѣсколькихъ слагаемыхъ угловъ и показывающихъ, что эта сумма иногда можетъ оказаться выпрямленнымъ угломъ $(2d)$.

Такую же цѣнность имѣетъ и обратная теорема, доказательство которой такъ трудно дается учащимся. Понятно теперь, почему? Потому что, въ сущности, здѣсь доказывать нечего, надо лишь видѣть. Здѣсь дѣло еще хуже; чтобы показать это, выписываю эту теорему въ редакціи одного изъ учебниковъ:

«Если сумма двухъ прилежащихъ угловъ DBC и CBA равна двумъ прямымъ, то ихъ внѣшнія стороны DB и BA образуютъ прямую линію; слѣд., эти прилежащіе углы будутъ смежными».

Если ученикъ усвоитъ понятія «прямой уголъ» и «сумма двухъ угловъ», то каково ему читать или слушать начало доказательства: «предположимъ, что DB не будетъ про-

долженіемъ прямой BA и т. д.». Ученикъ вправѣ сказать, что мы не имѣемъ права этого предполагать, такъ какъ дано, что $\angle DBC + \angle CBA = 2d$, а это равносильно тому, согласно опредѣленіямъ суммы угловъ и прямого угла, что DB BA являются продолженіемъ другъ друга. Преподавателю остается затуманить мысль и воображеніе ученика, чтобы заставить его принять предлагаемое доказательство.

III.

Вотъ еще нѣсколько примѣровъ, указывающихъ, что у насъ въ сущности на первомъ планѣ въ курсѣ геометріи не логика, а шаблонъ и традиція.

Во многихъ учебникахъ, слѣдуя Лежандру, принимаютъ за аксіому, что прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками.

Нельзя согласиться съ тою формою этой аксіомы, какая дана выше. Въ самомъ дѣлѣ, сейчасъ же возникаетъ вопросъ, что такое разстояніе между двумя точками; если на эту аксіому смотрѣть, какъ на опредѣленіе понятія о разстояніи, то слѣдовало бы выразить ее въ видѣ: прямолинейный отрѣзокъ, соединяющій двѣ точки, называется разстояніемъ между этими точками.

Изъ текста этой аксіомы (въ томъ ея видѣ, который приведенъ выше) можно еще почерпнуть, что между двумя точками существуютъ разныя разстоянія, изъ которыхъ выбирается кратчайшее; между тѣмъ, никто не назоветъ разстояніемъ земли отъ солнца ломаную или кривую, идущую отъ земли къ Сиріусу, потомъ къ Венерѣ и затѣмъ къ солнцу Если бы эту фразу сказать въ формѣ: «кратчайшій путь между двумя точками идетъ по прямолинейному отрѣзку, соединяющему эти точки», то противъ такой формы ничего нельзя было бы сказать: форма правильная, но понятіе «путь» не геометрическое и опирается на понятіе о линіи.

Повидимому, если желаемъ разсматриваемую фразу передѣлать въ аксіому, мы должны это сдѣлать въ слѣдующей формѣ:

1. Аксіома. *Прямолинейный отрѣзокъ, соединяющій двѣ точки, меньше всякой другой линіи, соединяющей тѣ же точки.*

Понятіе «меньше» въ примѣненіи къ отрѣзкамъ уже было выяснено.

2. Опредѣленіе. Въ виду предыдущей аксіомы, *прямолинейный отрѣзокъ, соединяющій двѣ точки, называется разстояніемъ между этими точками.*

Интересна еще очень распространенная обратная теорема, которая встрѣчается въ курсѣ геометріи дважды: въ планиметріи и въ стереометріи.

Въ планиметріи доказываютъ прямую теорему: «если изъ точки на прямую опущенъ перпендикуляръ и проведены наклонныя, то перпендикуляръ короче всякой наклонной»; затѣмъ дается обратная теорема, доказательство которой часто предоставляется самимъ учащимся: «кратчайшее разстояніе отъ точки до прямой есть перпендикуляръ».

Попробуемъ примѣнить сюда способъ составленія обратной теоремы изъ прямой, обычно излагаемый въ учебникахъ.

Прямая теорема читается «перпендикуляръ короче всякой наклонной». Слѣдовательно, здѣсь дано: 1) $OA \perp MN$, 2) OB наклонная къ MN; требуется доказать, что $OA < OB$. Составимъ обратную теорему: одно изъ условій надо помѣнять мѣстомъ съ заключеніемъ. Тогда дано: 1) $OA < OB$ и 2) OB наклонная къ M; требуется доказать $OA \perp MN$ (!?).

Не трудно, если вникнуть въ суть дѣла, а не ограничиваться игрою въ слова, понять, что 2 предложенія: 1) *перпендикуляръ короче всякой наклонной* и 2) *кратчайшая изъ всѣхъ прямыхъ, проведенныхъ изъ точки къ прямой, есть перпендикуляръ*—суть выраженія одной и той же мысли и, отнюдь, одно изъ нихъ не обратно другому.

Вотъ еще примѣръ, указывающій, что на первый планъ выдвигается діалектика, а суть дѣла въ загонѣ. Въ курсѣ геометріи J. Hadamard'а для доказательства существованія несоизмѣримыхъ отрѣзковъ разсматривается равнобедренный треугольникъ, у котораго уголъ при вершинѣ $= 1\frac{1}{5}d$, вмѣсто классиче-

скаго примѣра діагонали и стороны квадрата. Въ русскихъ учебникахъ также имѣетъ мѣсто указанная замѣна, мотивированная соображеніемъ, что въ этомъ примѣрѣ доказательство проще, чѣмъ въ классическомъ.

Къ сожалѣнію, для ученика этотъ примѣръ вовсе не убѣдителенъ, ибо ученикъ въ этомъ мѣстѣ курса еще не умѣетъ дѣлить прямой уголъ на 5 равныхъ частей и осуществить указаннаго равнобедреннаго треугольника не можетъ.

Слѣдуетъ подвергнуть тщательному пересмотру весь нашъ обычный курсъ геометріи и переработать тѣ мѣста его, которыя вызываютъ сомнѣнія. Вотъ еще сомнительное мѣсто курса: при изученіи вопроса объ измѣреніи площади прямоугольника доказываютъ рядъ теоремъ (аналогично ведутъ дѣло и въ вопросѣ объ измѣреніи объема прямоугольнаго параллелопипеда). Не касаясь вопроса о содержаніи этихъ теоремъ, вызывающемъ сомнѣнія, обращу вниманіе гг. членовъ Съѣзда на то, что здѣсь болѣе умѣстно повѣствовательное изложеніе, гдѣ учащіеся познакомились бы съ творческою работою человѣческой мысли, результатомъ которой явилось сознаніе, что возможно площадь каждаго прямоугольника выразить числомъ.

IV.

Предупредивъ предварительно, что я вовсе не стою за изученіе учащимися опредѣленій основныхъ понятій—моя точка зрѣнія будетъ изложена ниже,—я все же остановлюсь на изслѣдованіи того, какія системы опредѣленій даются въ нашихъ курсахъ. Я долженъ сдѣлать это потому, что 1) этимъ рядомъ опредѣленій характеризуется внутренняя логичность курса, которой я придаю столь большое значеніе и 2) нѣкоторыя изъ учебныхъ программъ обращаютъ вниманіе на то, чтобы ученики усвоили систему опредѣленій. Здѣсь, такъ какъ мнѣ нуженъ рядъ опредѣленій, я долженъ остановиться на отдѣльныхъ учебникахъ; однако я не стану называть ихъ именъ. Буду выбирать лишь учебники, допущенные Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. въ качествѣ руководства для среднихъ учебн. заведеній.

Вотъ рядъ опредѣленій изъ одного новаго учебника, но,

несмотря на новизну, составленнаго въ традиціонномъ направленіи:

1) Въ самомъ началѣ учебника читаемъ: «часть пространства, занимаемая физическимъ тѣломъ, называется его объемомъ или геометрическимъ тѣломъ».

Отсюда мы вправѣ сдѣлать выводъ: Объемъ и Геометрическое тѣло суть понятія тождественныя, откуда слѣдуетъ, что можно говорить лишь объ объемѣ физическаго тѣла, но нельзя говорить объ объемѣ геометрическаго тѣла. Но въ дальнѣйшемъ авторъ забываетъ начало своего учебника, или надѣется, что ученикъ не усвоилъ этого начала и не сумѣетъ сдѣлать указаннаго вывода. Въ самомъ дѣлѣ, въ дальнѣйшемъ, гдѣ изучается вопросъ объ измѣреніи объемовъ, находимъ:

2) Многогранникомъ называется тѣло, ограниченное со всѣхъ сторонъ плоскостями.

3) Какъ извѣстно, пространство, занимаемое тѣломъ называется его объемомъ.

Да, это извѣстно о физическомъ тѣлѣ, но неужели авторъ, говоря далѣе «объемъ многогранника», «объемъ призмы» и т. п. подразумѣваетъ физическія призмы, пирамиды и т. п. Такое объясненіе слѣдуетъ отбросить, такъ какъ геометрія не занимается изученіемъ физическихъ тѣлъ. Если бы авторъ сталъ на эту оригинальную точку зрѣнія, то онъ долженъ былъ бы оговорить это въ предисловіи. Остается думать, что авторъ (умышленно или не умышленно) забылъ начало своего учебника. Тѣ же сомнѣнія возникаютъ въ главѣ, гдѣ начинается изученіе тѣлъ вращенія; здѣсь дѣло еще хуже, такъ какъ еще яснѣе, что авторъ подъ именемъ тѣлъ вращенія понимаетъ геометрическія тѣла. Вотъ, напр., опредѣленіе шара: «тѣло, образованное вращеніемъ полукруга около своего діаметра, называется шаромъ», а «кругомъ называется часть плоскости, ограниченная окружностью» и т. д.,—здѣсь ничего физическаго нѣтъ.

Другой рядъ недоразумѣній возникаетъ на почвѣ слѣдующихъ опредѣленій:

1) Сочетаніе какихъ-нибудь точекъ, линій, поверхностей, тѣлъ, а также каждый изъ этихъ элементовъ въ отдѣльности называется геометрическою фигурою.

2) Многоугольникомъ назыв. часть плоскости, ограниченная со всѣхъ сторонъ прямыми.

Сопоставленіе этихъ опредѣленій позволяетъ заключить: многоугольникъ не есть фигура, между тѣмъ какъ многогранникъ (опредѣленіе цитируется выше) есть фигура, потому что именемъ «фигура» можетъ быть названо тѣло (часть пространства), но не часть плоскости (поверхность, упоминаемая въ опредѣленіи фигуры, совсѣмъ не то же самое, что часть ея). Далѣе имѣемъ еще опредѣленіе:

3) Часть плоскости, ограниченная со всѣхъ сторонъ, называется площадью.

Изъ (2) и (3) опредѣленій вытекаетъ: многоугольникъ есть частный видъ площади; также изъ опредѣленія круга (дано выше) слѣдуетъ: кругъ есть частный видъ площади. Какой же смыслъ имѣютъ встрѣчающіяся далѣе выраженія, «площадь прямоугольника, многоугольника, круга и т. п.»?

Далѣе имѣемъ: «фигуры, хотя и не равныя, но имѣющія равныя площади, назыв. равновеликими».

О какихъ фигурахъ здѣсь рѣчь? Вѣдь многоугольникъ, какъ указано выше, самъ, по мнѣнію автора, есть площадь; объ иныхъ объектахъ, которые можно разсматривать какъ фигуры и относительно которыхъ можно утверждать, что они имѣютъ площадь, въ курсѣ нѣтъ и помину. Да и вообще, что значитъ «фигура, имѣющая площадь»?

Въ одномъ изъ самыхъ распространенныхъ учебниковъ обращено *вниманіе на недоразумѣнія, создающіяся тѣмъ обстоятельствомъ*, что часть пространства иногда называютъ просто «тѣло», а иногда «объемъ тѣла» и т. п. и сдѣлана попытка устранить эти *недоразумѣнія*. Вотъ рядъ выписокъ изъ этого учебника:

1) Всякая ограниченная часть пространства назыв. геометрическимъ тѣломъ.

2) Объемомъ геометрическаго тѣла называется величина той части пространства, которую занимаетъ это тѣло.

Итакъ здѣсь, чтобы отличить опредѣленія тѣла и его объема, вводится слово «величина». Ясно ли значеніе выраженія «величина части пространства»? Мнѣ приходилось слышать,

а можетъ быть и читать гдѣ-либо (сейчасъ не припомню, гдѣ именно), поясненіе этого выряженія: надо разсматривать часть пространства независимо отъ ея формы. Повидимому, многіе преподаватели согласны, что выраженіе «величина части пространства» безъ поясненій, безъ дополненія—туманно, но вышеуказанное поясненіе, предлагающее мыслить опредѣленную часть пространства независимо отъ ея формы, еще усиливаетъ этотъ туманъ. Какъ, въ самомъ дѣлѣ, я могу отказаться отъ формы выдѣленной части пространства? Вѣдь потому лишь я считаю ее опредѣленнною частью, что ей придана извѣстная форма.

Въ нѣкоторыхъ учебникахъ ариѳметики настоятельно проводится мысль о различіи понятій о величинѣ и о значеніи величины. Нельзя не согласиться съ правильностью такого взгляда, а между тѣмъ въ курсѣ геометріи такое различіе не проводится такъ строго, какъ въ ариѳметикѣ (сравнить, напр., учебники ариѳметики и геометріи А. Киселева). Если держаться этого различія, то слѣдовало бы опредѣленіе 2-ое передѣлать:

Объемомъ тѣла назыв. значеніе величины «ограниченная часть пространства», которое она принимаетъ для даннаго тѣла.

Поэтому прежде всего слѣдуетъ установить, что ограниченныя части пространства можно разсматривать какъ величину, т. е. что здѣсь примѣнимы понятія «равно, больше, меньше» и понятіе о суммѣ; затѣмъ надо установить, какъ выбирать значеніе этой величины, соотвѣтствующее данному тѣлу. Если тѣло (см. выше данное опредѣленіе 1) есть ограниченная часть пространства, то само тѣло и является значеніемъ нашей величины, соотвѣтствующимъ этому тѣлу. Приходимъ опять къ результату, что и здѣсь, несмотря на введеніе слова «величина» (или «значеніе величины»), объемъ тѣла совпадаетъ съ самимъ тѣломъ.

Интересно еще остановиться на понятіи «длина». Обычно это понятіе вовсе не опредѣляется, и вотъ, напр., въ одномъ учебникѣ находимъ §, озаглавленный «соизмѣримыя и несоизмѣримыя длины», но въ этомъ § вовсе, кромѣ заглавія, не встрѣчаемъ слова «длина», а вмѣсто того все время говорится о соизмѣримыхъ и несоизмѣримыхъ прямолинейныхъ отрѣзкахъ.

Повидимому, хотя авторъ этого и не поясняетъ, все время понятія «длина» и «прямолинейные отрѣзки» въ этомъ учебникѣ считаются тождественными.

Вопросъ о длинѣ долженъ разрабатываться по слѣдующему плану: сначала учимся строить прямолинейные отрѣки (прямолинейный отрѣзокъ въ сущности есть комбинація прямой и двухъ точекъ) и оперировать надъ ними; затѣмъ устанавливаемъ возможность, опираясь на возможность распознавать равные отрѣзки, отличать большій отъ меньшаго, находить сумму двухъ отрѣзковъ, выражать каждый отрѣзокъ числомъ. Такимъ образомъ вовсе нѣтъ нужды говорить «о длинѣ прямол. отрѣзка»; въ примѣненіи къ другимъ объектамъ, какъ геометрическимъ, такъ и физическимъ, терминъ «длина» остается: мы говоримъ «длина ломаной линіи», «длина комнаты» и т. п. Тогда подъ именемъ длина какого либо объекта—надо понимать опредѣленный отрѣзокъ, связанный извѣстнымъ образомъ съ этимъ объектомъ: напр., подъ именемъ «длина ломаной» понимаютъ прямолинейный отрѣзокъ, который служитъ суммою всѣхъ сторонъ ломаной; подъ длиною комнаты понимаютъ, если полъ комнаты имѣетъ форму прямоугольника, наибольшую изъ сторонъ этого прямоугольника. Иногда прямолинейные отрѣзки, связанные съ извѣстными объектами, называютъ и другими именами: ширина, глубина, разстояніе и т. д. Возможно указать, что употребляютъ неправильное выраженіе «длина прямолинейнаго отрѣзка», здѣсь также надо съ объектомъ «прямолинейный отрѣзокъ» связать извѣстнымъ образомъ опредѣленный отрѣзокъ, и этимъ послѣднимъ является самъ данный объектъ.

Здѣсь, хотя бы лишь мимоходомъ, слѣдуетъ указать на нѣкоторыя нарушенія стройности плана курса геометріи въ обычномъ его изложеніи. Вотъ два примѣра: 1) вопросъ о разстояніи между двумя точками переплетается съ развитіемъ мысли «противъ бóльшаго угла лежитъ бóльшая сторона и обратно», 2) развитіе идеи о перпендикулярности между прямой и плоскостью переплетается съ вопросами о параллельности прямыхъ въ пространствѣ.

V.

Работая надъ составленіемъ своего курса геометріи, я прежде всего, чтобы найти выходъ изъ указанной путаницы геометрической терминологіи, долженъ былъ остановиться на вопросѣ, нельзя ли части плоскости, части пространства въ самомъ дѣлѣ разсматривать «независимо отъ формы»?

Исходнымъ пунктомъ явилось соображеніе, что можно разсматривать прямолинейные отрѣзки независимо отъ ихъ положенія. Для этого слѣдуетъ лишь откладывать отрѣзки, равные даннымъ, на опредѣленной прямой, отъ ея опредѣленной точки, въ опредѣленномъ направленіи. Тогда можно называть длиною даннаго отрѣзка ту часть, которую займетъ этотъ отрѣзокъ при наложеніи его на нашу опредѣленную прямую.

Подобное же наложеніе является возможнымъ выполнять и для ограниченныхъ прямыми линіями частей плоскости. Здѣсь надо прежде всего дать полную теорію превращенія части плоскости въ другую ей равновеликую, независимо отъ измѣренія площадей. Конечно, цѣлью этой теоріи является установленіе положенія, что всякая, ограниченная прямыми линіями, часть плоскости можетъ быть превращена въ равновеликій прямоугольникъ, имѣющій данное основаніе. Тогда, выдѣливъ изъ плоскости неопредѣленную прямоугольную полосу (см. чертежъ), мы можемъ всякую часть плоскости, ограниченную прямыми линіями, превратить въ прямоугольникъ, основаніе котораго равно ширинѣ нашей полосы, и наложить этотъ прямоугольникъ на нашу полосу; тогда подъ именемъ «площадь ограниченной части плоскости» мы можемъ понимать то протяженіе нашей полосы, которое окажется занятымъ полученнымъ прямоугольникомъ.

Подобнымъ же образомъ необходимо, далѣе, дать теорію, позволяющую чисто геометрически превращать каждую ограниченную плоскостями часть пространства въ прямоугольный параллелопипедъ съ даннымъ основаніемъ, опредѣленнымъ разъ навсегда. Тогда понятіе объ объемѣ выяснялось бы аналогично понятію о площади.

При такомъ толкованіи явилась бы возможность сохранить традиціонную терминологію: фигура есть часть плоскости, а *ея площадь* есть та часть прямоугольной полосы, выбранной разъ навсегда, которую займетъ наша фигура на *этой полосѣ* послѣ соотвѣтствующаго превращенія; тѣло есть часть пространства, а *объемъ тѣла* есть *соотвѣтствующая часть «пространственной прямоугольной полосы»*.

Авторы нашихъ учебниковъ не могутъ ссылаться на то, что такъ именно они и понимаютъ дѣло; не могутъ ссылаться потому, что въ ихъ учебникахъ нѣтъ чисто геометрической, независимой отъ измѣренія, теоріи превращенія частей плоскости и пространства въ прямоугольники и прямоугольные параллелопипеды съ даннымъ основаніемъ. А между тѣмъ, такая теорія для частей плоскости можетъ быть дана въ чисто геометрическомъ видѣ; для частей же пространства, ограниченныхъ плоскостями, дать такую теорію возможно лишь съ помощью принципа Кавальери, *примѣняя его* къ вопросу о превращеніи пирамиды въ равновеликую призму. Но даже и проведеніе этой теоріи въ курсахъ геометріи не поколебало бы моей увѣренности въ томъ, что надо отказаться теперь отъ принятой терминологіи. Пусть Евклидъ, Архимедъ, Гюйгенсъ и проч. понимали подъ именемъ «треугольникъ» часть плоскости, но вѣдь они за то не употребляли выраженія «площадь треугольника»; они говорили: треугольникъ равенъ квадрату..., а мы теперь говоримъ: площадь треугольника равна площади квадрата...

Такое измѣненіе оборота нашей рѣчи вызвано тѣмъ взглядомъ на объекты геометріи, который теперь лишь постепенно завоевываетъ надлежащее мѣсто, среди математической литературы. Этотъ взглядъ *сложился несомнѣнно подъ вліяніемъ* создавшейся послѣ Евклида, Архимеда, Гюйгенса... отрасли геометрической науки, которая раньше называлась у насъ — Высшая геометрія (у нѣмцевъ Die Geometrie der Lage), а теперь называется Проэктивная геометрія.

Вотъ тотъ взглядъ на объекты, съ которыми оперируетъ геометрія, который сложился у меня и который мнѣ представляется единственно правильнымъ. Въ изложеніи этого взгляда

я буду руководиться мыслями, высказанными Г. Пуанкаре въ его мемуарѣ «Наука и методъ».

VI.

Геометрія, какъ и всякая наука, имѣетъ дѣло съ фактами. Подъ вліяніемъ опыта наше сознаніе пришло къ возможности признать существованіе нематеріальныхъ точекъ, линій и поверхностей, причемъ вмѣстилищемъ ихъ является пространство. Далѣе, изъ этихъ фактовъ выбираются простѣйшіе; таковыми мы признаемъ точку, прямую линію и плоскость. Затѣмъ начинается комбинаціонная работа, которая такъ хорошо изложена въ указанномъ сочиненіи Г. Пуанкарре: мы строимъ изъ этихъ фактовъ различныя комбинаціи, изыскиваемъ почему-либо интересныя среди нихъ. Каждая такая комбинація и является объектомъ для геометрическаго изслѣдованія. Такимъ образомъ на прямолинейный отрѣзокъ слѣдуетъ смотрѣть, какъ на комбинацію прямой линіи и двухъ точекъ на ней расположенныхъ, на уголъ—какъ на комбинацію точки и двухъ лучей изъ нея исходящихъ, на треугольникъ—какъ на комбинацію трехъ точекъ и трехъ попарно соединяющихъ ихъ прямыхъ и т. д.; въ связи съ этимъ названія кругъ и окружность должны считаться синонимами, какъ это часто на самомъ дѣлѣ и дѣлаютъ, и должны обозначать геометрическое мѣсто точекъ плоскости, одинаково удаленныхъ отъ данной точки. Термины «площадь треуг-ка, площадь многоуг-ка, площадь круга» при вышеизложенномъ воззрѣніи получатъ опредѣленный смыслъ и будутъ обозначать части плоскости, выдѣляемыя треуг-омъ, многоугольникомъ, кругомъ. Слѣдуетъ замѣтить относительно многоугольника, что можно построить такой, напр., 6-угольникъ (комбинація изъ 6 точекъ и 6 соединяющихъ ихъ въ опредѣленномъ порядкѣ прямыхъ), что смыслъ понятія «площадь этого 6-угольника» возможно установить лишь при условіи приписывать частямъ плоскости знаки + и —. Если же, какъ это обычно дѣлается въ элементарномъ курсѣ, отказаться отъ знаковъ для кусковъ плоскости, то слѣдуетъ говорить, что у этого 6-угольника

нѣтъ площади,—такіе многоугольники, неимѣющіе площади, обычно называются звѣздчатыми.

Аналогично этому долженъ развиваться взглядъ и на пространственные объекты: подъ именемъ призма, пирамида, многогранникъ и т. п. слѣдуетъ понимать всякій разъ вполнѣ опредѣленную комбинацію точекъ, прямыхъ и плоскостей. Тогда подъ именемъ «объемъ призмы», «объемъ пирамиды», «объемъ многогранника» слѣдуетъ понимать часть пространства, ограниченную соотвѣтствующей комбинаціею точекъ, прямыхъ и плоскостей. Болѣе общее понятіе «тѣло» слѣдуетъ толковать какъ комбинацію точекъ, какихъ-либо линій и какихъ-либо поверхностей, выдѣляющую изъ пространства опредѣленную часть. Тогда подъ именемъ «объемъ тѣла» явится возможнымъ понимать часть пространства, выдѣляемую этимъ тѣломъ (т. е. этою комбинаціею). Также, наконецъ, подъ именемъ шаръ надо понимать геометр. мѣсто точекъ пространства, равноудаленныхъ отъ данной точки. Тогда терминъ «объемъ шара» получитъ смыслъ и будетъ выражать часть пространства, выдѣляемую разсматриваемымъ геометр. мѣстомъ. Возможно, наконецъ, сдѣлать еще шагъ впередъ и понимать подъ именемъ фигура любую комбинацію линій и точекъ на плоскости, а подъ именемъ тѣло любую комбинацію точекъ, линій и поверхностей въ пространствѣ (напр., тогда совокупность двухъ параллельныхъ плоскостей и перпендикулярной къ нимъ прямой является тѣломъ).

Возвращусь еще разъ къ нашимъ обычнымъ учебникамъ. Совершенно непонятною является разница между двумя опредѣленіями:

1) Многоугольникомъ назыв. фигура, образованная замкнутою ломаною линіею (иногда добавляютъ: вмѣстѣ съ частью плоскости, ограниченною этою линіею).

2) Многогранникомъ называется тѣло (а подъ этимъ именемъ понимаютъ въ учебникахъ часть пространства), ограниченное со всѣхъ сторонъ плоскостями.

Первое опредѣленіе какъ бы указываетъ на желаніе смотрѣть на многоуг-къ, какъ на совокупность точекъ и прямыхъ линій (впрочемъ, здѣсь видна туманность воззрѣній ав-

торовъ учебниковъ; на это указываютъ: 1) совершенно не нужное слово «образованная» и 2) добавленія «вмѣстѣ съ частью плоскости, ограниченной этою линіею»,—вѣдь иногда невозможно и разобрать, какую часть плоскости эта линія ограничиваетъ). Почему же второе опредѣленіе (многогранника) не идетъ аналогично первому? Почему и на многогранникъ нельзя смотрѣть, какъ на замкнутую многогранную поверхность или какъ на комбинацію точекъ, прямыхъ и плоскостей?

При вышеизложенномъ воззрѣніи на геометрическіе объекты становятся понятными требованія «построить уголъ, треугольникъ, кругъ» и т. п. «построить призму, пирамиду» и т. п., становятся понятными и съ теоретической, и съ практической точекъ зрѣнія.

Съ теоретической точки зрѣнія построить какой либо объектъ на плоскости или въ пространствѣ значитъ—фиксировать свое вниманіе на опредѣленныхъ точкахъ и линіяхъ на плоскости, или на опредѣленныхъ точкахъ, линіяхъ и поверхностяхъ въ пространствѣ.

Съ практической точки зрѣнія мы прежде всего постулируемъ возможность построенія точекъ, прямыхъ и круговъ на плоскости и еще плоскостей въ пространствѣ, и это постулированіе даетъ намъ возможность осуществить объектъ, подлежащій построенію, если въ его составъ входятъ только перечисленные основные элементы.

При взглядѣ же напр., на многоугольникъ, какъ на часть плоскости, непонятнымъ является требованіе «построить многоугольникъ» ни съ теоретической, ни съ практической точекъ зрѣнія: 1) нельзя фиксировать свое вниманіе на части плоскости, не останавливая его на тѣхъ объектахъ, которыми эта часть выдѣляется, 2) мы постулируемъ возможность осуществленія точекъ, прямыхъ, плоскостей, а не частей плоскости и не частей пространства.

VII.

Въ заключеніе остановлюсь на вопросахъ общаго характера.

Въ настоящее время широкимъ распространеніемъ пользуется мысль о необходимости раздѣлить обученіе геометріи на

два курса: на пропедевтическій и на систематическій. Изъ основного положенія, что въ созиданіи геометріи участвуютъ двѣ нашихъ духовныхъ способности, интуиція и логика, дѣлаютъ неправильный выводъ (см. докладъ С. А. Богомолова), что необходимо построить два курса геометріи, каждый изъ которыхъ опирался бы на одну изъ этихъ способностей. Вызываетъ прежде всего большія сомнѣнія вопросъ, возможно-ли отдѣлить вполнѣ другъ отъ друга роль интуиціи и логику въ созиданіи геометріи? И тѣ научныя работы, которыя посвящены этому вопросу, еще не рѣшили этой задачи.

Нѣтъ, если интуиція и логика обѣ участвуютъ въ созиданіи геометріи, то отсюда слѣдуетъ, что должно стремиться къ созданію такого учебнаго курса, въ которомъ бы эти наши способности были бы гармонически соединены для достиженія общей цѣли: сдѣлать близкими сознанію учащихся тѣ объекты, надъ которыми работаетъ геометрія. Въ этомъ курсѣ и интуиція, и логика должны идти рука объ руку. Не можетъ служить возраженіемъ противъ возможности такого курса указаніе на плохіе результаты изученія геометріи по существующимъ курсамъ; не можетъ служить потому, что, какъ я это старался показать въ своемъ докладѣ, въ современномъ курсѣ геометріи имѣютъ мѣсто постоянные конфликты между логикой и интуиціею и даже логика нашего курса оказывается весьма сомнительной. Кромѣ того, пусть сторонники раздѣленія курса геометріи на пропедевтическій и систематическій дадутъ такіе курсы: нельзя же видѣть рѣшеніе этой задачи лишь въ томъ, что-бы, прежде чѣмъ изучать геометрію по нашимъ обычнымъ учебникамъ (неужели курсъ, излагаемый въ нихъ, можно назвать систематическимъ?), дать учащимся наборъ фактовъ, безъ углубленія въ изученіе ихъ, накопляя ихъ въ безпорядкѣ другъ за другомъ въ представленіи учащихся, какъ это дѣлается въ современныхъ пропедевтическихъ курсахъ (Кутузовъ, Астрябъ и другіе). Если мы правильно подошли бы къ рѣшенію задачи о раздѣленіи курса геометріи на пропедевтическій и систематическій, то, можетъ быть, однимъ изъ главныхъ условій такого раздѣленія оказалась бы мысль, что въ систематическомъ курсѣ не должно повторяться то, что́ уже усвоено въ пропедевти-

ческомъ, и такимъ образомъ оба курса слились бы въ одинъ общеобразовательный курсъ, гдѣ въ началѣ первенствующее мѣсто занимала бы интуиція и лишь постепенно все большія и большія права захватывала бы логика.

Если будетъ признано необходимымъ познакомить учащихся съ работами въ области геометріи, задачею которыхъ является отдѣленіе интуиціи и логики, то этому знакомству нѣтъ мѣста въ общеобразовательномъ курсѣ. Оно возможно лишь въ спеціальныхъ математическихъ классахъ, которые имѣютъ мѣсто во Франціи и на необходимость которыхъ для русской школы въ этихъ же самыхъ стѣнахъ Педагогическаго Музея указалъ 20 лѣтъ тому назадъ В. Б. Струве, докладъ котораго по этому же поводу будетъ еще нами заслушанъ.

Другое добавленіе общаго характера я сдѣлаю по методикѣ геометріи.

Современное обученіе геометріи направляется двумя положеніями: 1) желаніемъ доказывать все, что не аксіома и 2) требованіемъ исходить въ этихъ доказательствахъ изъ опредѣленій. Во многихъ оффиціальныхъ программахъ, даже новѣйшаго времени, указывается на «развитіе формальнаго мышленія» учащихся и на «построеніе системы опредѣленій».

Главною цѣлью моего доклада было намѣреніе показать, до чего доходитъ на практикѣ слѣдованіе этимъ двумъ положеніямъ: мы доказываемъ теоремы, не имѣющія содержанія, а, съ другой стороны, мы даемъ опредѣленія, противорѣчащія другъ другу.

На наше счастье имѣются ученики, способные къ математикѣ, которые сами начинаютъ смутно сознавать, что не въ томъ суть, что опредѣленія выставляются въ курсѣ геометріи лишь для порядка, а на самомъ дѣлѣ не ихъ надо стремиться усвоить.

Да, конечно, суть дѣла не въ опредѣленіяхъ. Если мы возьмемъ какой-либо геометрическій объектъ, даже не изъ основныхъ (опредѣленія основныхъ геометрическихъ объектовъ были разобраны въ докладѣ), напр., ромбъ, то даже здѣсь можно было бы поднять споръ объ его опредѣленіи: одни говорили бы, что ромбъ есть параллелограмъ, у котораго двѣ сосѣднія сто-

роны равны, а другіе утверждали бы, что ромбъ есть параллелограмъ, у котораго всѣ стороны равны, а между тѣмъ образъ ромба у всѣхъ насъ одинъ и тотъ же. Создать систему опредѣленій основныхъ геометрическихъ понятій—дѣло крайне трудное, и предыдущія страницы моего доклада касаются этого вопроса.

Поэтому въ основу обученія геометріи должно быть положено созданіе правильныхъ образовъ геометрическихъ объектовъ, а не «система опредѣленій». Опредѣленія всегда остаются лишь словами, и эти слова, если они заучены, не являются еще гарантіею того, что учащіеся представляютъ себѣ объекты, соотвѣтствующіе этимъ словамъ. Если же мы добьемся того, чтобы учащіеся свыклись съ образами геометрическихъ объектовъ, то описаніе ихъ словами является задачею, легко разрѣшаемою.

Итакъ, исходнымъ пунктомъ является созданіе образовъ. Все обученіе геометріи должно, по моему мнѣнію, въ каждой части курса распадаться на 4 стадіи: 1) прежде всего необходимо научиться осуществлять объектъ; въ области элементарной геометріи осуществленіе объекта сводится къ построенію циркулемъ и линейкою, но не слѣдуетъ пренебрегать осуществленіемъ и при помощи модели; 2) послѣ того, какъ объектъ осуществленъ, слѣдуетъ всестороннее изученіе какъ самого объекта, такъ и тѣхъ вопросовъ, которые возникаютъ при его осуществленіи,—это изученіе направляется сопоставленіемъ этого объекта съ тѣми, которые уже были изучены, 3) далѣе, должны слѣдовать упражненія въ построеніяхъ, причемъ подъ этимъ именемъ я понимаю не общепринятыя задачи на построеніе, а тѣ малыя упражненія, которыя необходимы, чтобы образъ объекта лучше запечатлѣлся въ сознаніи учащихся, напр.: для усвоенія образа перпендикулярныхъ прямыхъ необходимо строить (а иногда даже только рисовать отъ руки) перпендикуляры къ даннымъ прямымъ, располагая ихъ во всевозможныхъ положеніяхъ по отношенію къ краямъ доски или страницы тетради; для ознакомленія съ разнообразіемъ образовъ параллелограмовъ надо строить рядъ параллелограмовъ по даннымъ, не вполнѣ опредѣляющемъ параллелограмъ (напр., по двумъ противоположнымъ вершинамъ и т. п.),—здѣсь важнымъ моментомъ обученія является сознаніе учащагося, что онъ можетъ

удовлетворить требованіямъ задачи и въ то же время слѣдовать своему произволу; 4) наконецъ, можно обратить преимущественное вниманіе на логику и предложить рядъ логическихъ упражненій, сводящихся къ составленію различныхъ возможныхъ словесныхъ опредѣленій изученнаго объекта и къ выводу изъ составленнаго какого-либо опредѣленія, въ которомъ перечисленъ рядъ признаковъ объекта, другихъ признаковъ того же объекта.

Необходимо обратить вниманіе на то, что предлагаемая методика обученія геометріи требуетъ много времени, быть можетъ, значительно больше, чѣмъ его дается теперь на уроки геометріи. И поэтому мнѣ представляется крайне желательнымъ увеличить время, отведенное на геометрію, безъ увеличенія (а можетъ быть, даже и съ сокращеніемъ) программы; особенно это необходимо для женскихъ гимназій, какъ Мин. Нар. Просв., такъ и особенно Вѣдом. Имп. Маріи.

Кромѣ того, если мы хотимъ правильно обучать геометріи и добиться осязательныхъ результатовъ, необходимо отказаться отъ установившейся внѣшней схемы преподаванія. Эта внѣшняя схема у насъ состоитъ изъ четырехъ моментовъ: объясняется, задается, спрашивается, оцѣнивается.

Пора отказаться отъ этой схемы; не должно быть ни заданій, ни спрашиваній; все время должна идти одна непрерывная работа учащихся подъ руководствомъ преподавателя надъ усвоеніемъ разбираемыхъ вопросовъ, надъ углубленіемъ въ ихъ сущность. Эта работа, начинаясь въ классѣ, можетъ быть продолжаема въ извѣстные моменты учащимися и внѣ класса. Уже изъ того положенія, что основою обученія является не выучиваніе опредѣленій, а созданіе образовъ, слѣдуетъ, что безцѣльно задавать разучивать страницы учебниковъ и спрашивать выученное дома. Если внимательно вникнуть въ содержаніе той работы, которая выше мною разбита на 4 стадіи (осуществленіе образа, его изученіе, упражненія въ построеніяхъ, логическія упражненія), то легко видѣть, что въ этой работѣ нѣтъ мѣста ни задаванію, ни спрашиванію, а тѣмъ болѣе нѣтъ мѣста для оцѣнки баллами этихъ отдѣльныхъ спросовъ.

Тѣ точки зрѣнія, которыя я развивалъ въ своемъ докладѣ, я проводилъ не только въ составленныхъ мною курсахъ геометріи, но и на практикѣ: въ двухъ женскихъ гимназіяхъ и на общеобразовательныхъ курсахъ Московскаго Общества Народныхъ Университетовъ. Правда, недостатокъ времени не позволялъ провести курсъ вполнѣ такъ, какъ хотѣлось бы, а, съ другой стороны, установившаяся схема преподаванія заставляла прибѣгать къ искусству жонглированія; но я видѣлъ, что мои ученицы и мои слушатели относились къ занятіямъ геометріею съ интересомъ. А видѣть этотъ интересъ на своихъ урокахъ для насъ, преподавателей, и должно являться наиболѣе цѣнною, наиболѣе желательною наградою».

Конспектъ.

Сложившійся у насъ курсъ геометріи въ средней школѣ обладаетъ недостатками, которые мѣшаютъ пониманію курса учащимися.

Логика въ курсѣ геометріи должна проявляться двояко: 1) въ планѣ построенія курса и 2) въ *силлогизмахъ*, служащихъ для доказательства теоремъ.

Наибольшее значеніе должно имѣть первое проявленіе логики, между тѣмъ, какъ нашъ курсъ обращаетъ больше вниманія на второе.

Современный курсъ геометріи грѣшитъ противъ обоихъ проявленій логики:

1) Примѣрами прегрѣшеній противъ второго проявленія служатъ прямая и обратная теорема о смежныхъ углахъ, одна изъ аксіомъ о прямой линіи, одна изъ обратныхъ теоремъ о перпендикулярѣ и наклонныхъ и проч.

2) Погрѣшности противъ перваго проявленія логики проявляются въ опредѣленіяхъ основныхъ понятій (тѣло, объемъ, многоугольникъ, площадь, длина и т. п.), а также въ недостаточномъ отдѣленіи развитія одной идеи отъ развитія другой

Выходъ изъ указанныхъ затрудненій возможенъ лишь съ

установленіемъ новой терминологіи, заимствованной изъ проэктивной геометріи.

Обученіе геометріи должно покоиться не на изученіи системы опредѣленій, а на созданіи образовъ въ представленіи учащихся.

Желательность измѣненія внѣшней схемы преподаванія.

Необходимость увеличенія времени для курса геометріи, особенно въ женскихъ гимназіяхъ.

Пренія по докладу Н. А. Извольскаго.

А. П. Киселевъ (Спб.) относительно методическихъ указаній докладчика сдѣлалъ слѣдующія замѣчанія:

I. Теорема о суммѣ смежныхъ угловъ имѣетъ смыслъ даже и тогда, когда она основывается на понятіи о развернутомъ углѣ, и смыслъ ея совершенно ясенъ, если не введено въ самомъ началѣ геометріи понятія о развернутомъ углѣ.

II. Если имѣетъ смыслъ прямая теорема, то и обратная ей имѣетъ смыслъ.

III. Утвержденіе докладчика, что выраженіе „перпендикуляръ короче всякой наклонной" и выраженіе „кратчайшее разстояніе отъ точки до прямой есть перпендикуляръ, опущенный изъ этой точки на прямую" — равносильны, является утвержденіемъ неправильнымъ: предложннія эти — различны. Это становится совершенно яснымъ, если вообразить, что не изъ всякой точки можно опустить перпендикуляръ на прямую.

IV. Вопросъ объ опредѣленіяхъ для площади и объема принадлежитъ къ труднѣйшимъ. Не достаточно удовлетворительно опредѣлены эти понятія и въ научныхъ сочиненіяхъ, а потому соотвѣтственная неточность въ элементарномъ курсѣ геометріи не является особенно важной.

Е. С. Томашевичъ (Москва). «Докладчикъ, коснувшись больныхъ мѣстъ нашихъ учебниковъ геометріи, совсѣмъ не упомянулъ о томъ недостаткѣ, который имѣется въ изложеніи вопросовъ, касающихся пропорціональности различныхъ величинъ и измѣренія площадей и объемовъ. Во всѣхъ этихъ статьяхъ постоянно разсматриваются случаи соизмѣримости и несоизмѣримости и разсматриваются очень плохо: логика и строгость здѣсь отсутствуютъ. Напримѣръ, при сравненіи площадей двухъ прямоугольниковъ перемножаются отношенія отрѣзковъ по способу перемноженія

дробей, безъ всякаго права на такое дѣйствіе. Не проще ли при измѣреніи площади прямоугольника получить приближенный результатъ съ указаніемъ, какъ ошибки, такъ и средства къ ея уменьшенію. Еще слабымъ мѣстомъ учебниковъ является статья о длинѣ окружности и площади круга".

П. А. Компанеецъ (Одесса) замѣтилъ, что совершенно напрасно авторы учебниковъ избѣгаютъ давать понятіе о „развернутомъ углѣ": по наблюденіямъ П. А. Компанейца, это понятіе легко усваивается учениками.

А. Л. Остроумова (Тихвинъ, Новг. г.) высказала пожеланіе, чтобы въ главѣ объ измѣреніи угловъ были рѣзко подчеркнуты три возможныхъ типа угловъ, стороны которыхъ пересѣкаютъ окружность: 1) вершина угла лежитъ на окружности; 2) вершина лежитъ внѣ круга и 3) вершина лежитъ внутри круга.

О. П. Перли (Ростовъ на Дону) выразилъ сожалѣніе о томъ, что докладчикъ не коснулся болѣе подробно вопроса о задачахъ на построеніе. Затѣмъ О. П. Перли отмѣтилъ слѣдующіе недостатки въ школьныхъ курсахъ геометріи.

I. Уголъ трактуется въ учебникахъ, какъ часть плоскости.

II. Въ учебникахъ имѣются три теоремы о равенствѣ треугольниковъ и нѣсколько теоремъ о равенствѣ прямоугольныхъ треугольниковъ; основныхъ же задачъ на построеніе треугольниковъ—четыре и основныхъ случаевъ рѣшенія косоугольныхъ треугольниковъ въ тригонометріи—четыре: слѣдовательно, теоремъ о равенствѣ треугольниковъ должно быть четыре.

III. О подобіи треугольниковъ говорится раньше, чѣмъ о пропорціональныхъ отрѣзкахъ: теорема „Въ подобныхъ треугольникахъ сходственныя стороны пропорціональны" предшествуетъ теоремѣ: „Двѣ параллельныя прямыя разсѣкаютъ стороны угла на пропорціональныя части". Слѣдовало бы держаться обратнаго порядка.

П. А. Долгушинъ (Кіевъ) отмѣтилъ большое число нападокъ на неясность въ опредѣленіяхъ основныхъ понятій (напр., „угла") и, во избѣжаніе споровъ на эту тему въ будущемъ, предложилъ просить Организаціонный Комитетъ слѣдующаго Съѣзда о томъ, чтобы компетентными лицами было подготовлено нѣсколько докладовъ объ основныхъ математическихъ понятіяхъ.

По поводу пожеланія, высказаннаго П. А. Долгушинымъ, присутствовавшій предсѣдатель Организаціоннаго Комитета З. А. Макшеевъ обратился къ Собранію со слѣдующимъ заявленіемъ: „Организаціонный Комитетъ сочтетъ своей обязанностью содѣйствовать осуществленію только тѣхъ пожеланій, которыя будутъ

переданы ему Собраніемъ, — съ своей стороны, я могу только пожелать, чтобы такого рода заявленія отъ васъ туда поступали!"

П. А. Извольскій (Москва). „Выпрямленный уголъ есть единственный изъ угловъ, отличающійся отъ всѣхъ остальныхъ особымъ признакомъ; поэтому введеніе его въ курсъ необходимо. Безъ этого угла нѣтъ смысла говорить о суммѣ двухъ смежныхъ угловъ: безъ него былъ бы нарушенъ постулатъ о сложеніи, потому что сложеніе оказалось бы не всегда возможнымъ".

„Доводы А. П. Киселева не убѣдили меня, и я опять-таки утверждаю, что предложенія „перпендикуляръ короче всякой наклонной" и „кратчайшее разстояніе точки отъ прямой есть перпендикуляръ" — являются различными словесными выраженіями одной и той же мысли".

„Я очень благодаренъ Е. С. Томашевичу, который привелъ еще другіе примѣры изъ курса геометріи, указывающіе на неправильное трактованіе предмета. Задачи и упражненія на построеніе должны быть основою всего курса геометріи".

„Прямой уголъ по моему плану долженъ быть введенъ въ курсъ только тогда, когда онъ самъ-собою получается, т. е., послѣ построенія ромба".

„Знакомство съ основами проективной геометріи является необходимымъ для преподавателя: подъ ея вліяніемъ измѣнился взглядъ на геометрическіе объекты. Если Эвклидъ, Архимедъ, Гюйгенсъ и др. подъ именемъ «треугольникъ» понимали «часть плоскости», то они никогда не говорили „площадь треугольника". Послѣ нихъ развилась проективная геометрія, которая на всякій многоугольникъ смотритъ, какъ на комбинацію точекъ и прямыхъ. Такой взглядъ необходимо перенести и въ элементарный курсъ; причемъ подъ площадью многоугольника надо понимать ту часть плоскости, которая имъ ограничивается, если многоугольникъ не звѣздчатый; если же многоугольникъ звѣздчатый, то для установленія понятія о его площади необходимо приписывать частямъ плоскости знаки „+" и „—". Несомнѣнно, въ моемъ курсѣ геометріи имѣется много недостатковъ (нѣкоторые изъ нихъ я уже самъ замѣтилъ); но надо смотрѣть на мои книги, какъ на одну изъ первыхъ попытокъ построить курсъ геометріи на новыхъ основаніяхъ".

VII. О реальномъ направленіи преподаванія математики въ связи съ жизненными и научными фактами.

Докладъ Н. Н. Володкевича (Кіевъ).

«Требованіе жизненности и реальности изучаемаго матеріала не означаетъ признанія утилитарной цѣли, какъ наивысшей цѣли образованія. Утилитарная точка зрѣнія оцѣниваетъ знаніе по его непосредственной практической приложимости; но непосредственно утилизируемое знаніе есть прикладная наука, и ея изученіе входитъ въ задачу спеціальной или профессіональной, а не общеобразовательной школы. Цѣль науки болѣе высокая, чѣмъ непосредственная польза; она стремится къ открытію истины и удовлетворенію наиболѣе высокихъ запросовъ души человѣка. Какъ говоритъ Laisant, измѣрять науку по ея полезности это почти преступленіе. Оцѣнивать науку по ея практической полезности, въ качествѣ руководящей точки зрѣнія въ общеобразовательной школѣ, такъ же абсурдно, какъ совершенно устранить всякое практическое приложеніе науки въ спеціальной школѣ. Но требованіе основывать преподаваніе науки въ общеобразовательной школѣ на жизненныхъ и реальныхъ фактахъ не только не исключаетъ основную идею общеобразовательной школы—всестороннее развитіе душевныхъ силъ воспитанника — но даже единственно имѣетъ ее въ виду. утверждая только, что достиженіе этой цѣли наиболѣе надежно гарантируется жизненнымъ и реальнымъ содержаніемъ. Какія же основанія могутъ быть приведены для этого утвержденія?

Наука занимается общимъ, а не спеціальнымъ, абстрактнымъ, а не конкретнымъ. Абстракція составляетъ ея сущность. Путемъ абстракціи она строитъ свои обобщенія, свои законы, гипотезы и теоріи—весь тотъ удивительный міръ символовъ, въ которомъ умъ человѣка, повидимому, ничѣмъ не стѣсненный, кромѣ собственныхъ законовъ, свободно и легко вращается. Вся наука представляетъ идеальное построеніе; законы, классификація, обобщенія существуютъ только въ умѣ человѣка, въ природѣ же нѣтъ общихъ, а только конкретные, единичные

факты. Иногда очень близко соприкасаясь съ конкретнымъ, какъ въ естественныхъ наукахъ, наука иногда почти безконечно отъ него удаляется, и въ математикѣ стоитъ такъ далеко отъ конкретнаго міра, что, повидимому, ничего не имѣетъ съ нимъ общаго. Кантъ сказалъ, что наука лишь постольку заслуживаетъ названія науки, поскольку она проникается математикой; это стремленіе всякой науки принять математическую обработку обусловливается самой ея сущностью,—тѣмъ, что ея область—общее и абстрактное, а не единичное и конкретное, вѣчное, а не временное; поэтому наука дѣлается тѣмъ болѣе научной, чѣмъ болѣе она удаляется отъ конкретнаго и временнаго, чѣмъ болѣе принимаетъ математическую обработку.

Необходимость абстракціи и выработки общихъ идей вытекаетъ изъ безграничной сложности явленій конкретной дѣйствительности и ограниченной силы нашего ума. Всякій простѣйшій конкретный фактъ, воспринимаемый нами какъ нѣкоторое единство, по существу представляетъ сложную совокупность причинъ, условій и свойствъ; чтобы мыслить конкретный фактъ, какъ единое цѣлое и въ то же время безконечно-сложное цѣлое, необходимы мыслительныя силы, превышающія ограниченныя силы нашего ума. Отсюда необходимость упростить явленіе, выдѣлить то, что составляетъ его сущность, т. е. совершить тѣ умственныя операціи, которыя называются абстрагированьемъ и обобщеніемъ, и подставить вмѣсто конкретнаго факта отвлеченную идею, т. е. символъ, обнимающій всѣ однородные факты въ одномъ усиліи мысли.

Но этотъ міръ символовъ, составляющій науку и создаваемый абстрагирующей и обобщающей дѣятельностью ума человѣка, не есть его самостоятельное твореніе; умъ самъ по себѣ, своей собственной и ничѣмъ не стѣсненной дѣятельностью, не можетъ создать ни одной общей идеи, основной матеріалъ для которой не былъ бы взятъ изъ конкретнаго міра. Поэтому вся наука въ цѣломъ представляетъ только идеальное отображеніе въ умѣ человѣка всеобщей связи вещей и явленій конкретнаго міра и обусловливается неспособностью нашего ума понимать конкретное иначе, какъ sub specie abstracti. Такимъ образомъ наука, какъ и наша мысль, остается

навѣки и неразрывно связанной съ конкретнымъ. Какъ бы далеко не уносился нашъ умъ въ своей абстрагирующей и обобщающей дѣятельности отъ реальнаго міра, единственнымъ критеріемъ правильности его дедукцій остается согласіе ихъ съ реальными фактами. Въ этомъ мірѣ символовъ, отвлеченныхъ построеній, теорій и дедукцій изъ нихъ, который составляетъ науку, легко заблудиться и придти къ нелѣпымъ выводамъ, если упускать изъ виду, что идеальное лишь постольку истинно, поскольку оно соотвѣтствуетъ дѣйствительности; необходима поэтому постоянная провѣрка результатовъ, добытыхъ умственными операціями, на ихъ согласіе съ дѣйствительностью. Реальное, конкретное — это тотъ оселокъ, на которомъ испытывается достоинство всякой теоріи, всякаго идеальнаго построенія въ какой бы то ни было области знанія — въ наукахъ о природѣ, гуманитарныхъ или математическихъ. Въ этомъ взаимодѣйствіи идеальнаго и реальнаго осуществляется возможная для насъ полнота нашего знанія; одни конкретные факты не могутъ составить научнаго знанія—совокупность ихъ есть не что иное, какъ грубый эмпиризмъ, но и одно отвлеченное знаніе не имѣетъ цѣны, потому что въ своихъ выводахъ оно шатко и недостовѣрно. Рождаясь изъ конкретныхъ фактовъ, наши умозрѣнія и теоріи должны обратно вернуться къ конкретному міру и изъ согласія съ нимъ получить свое оправданіе и почерпнуть дальнѣйшую поддержку. Такимъ образомъ, проникновеніе науки конкретнымъ содержаніемъ обусловливается самой природою науки, зависящей отъ природы нашей мыслительности и нашей познавательной дѣятельности. Но связь науки съ конкретнымъ міромъ необходима еще для достоинства самой науки, — для того, чтобы она не превратилась въ пустую и безполезную игрушку.

Этотъ конкретный міръ, къ которому должна вернуться наука, чтобы не потерять послѣ ряда дедукцій своей точки опоры, есть міръ единичныхъ фактовъ, тотъ міръ, въ которомъ мы живемъ и дѣйствуемъ. Оперируя въ наукѣ съ общими, отвлеченными идеями, мы въ жизни, въ реальномъ мірѣ имѣемъ дѣло только съ единичными, конкретными фактами. Переходъ отъ абстрактнаго къ конкретному означаетъ, слѣдова-

тельно, переходъ отъ научныхъ выводовъ и общихъ положеній къ жизненному и реальному, переходъ отъ того, что мыслится, къ тому, что дѣлается. Конечно, наука или знаніе не является primum movens нашихъ поступковъ, но, освѣщая факты и ихъ взаимоотношенія, она призвана руководить нашимъ поведеніемъ.

Поэтому, элементъ полезности никоимъ образомъ не можетъ быть устраненъ изъ науки. Не заботясь о непосредственной приложимости своихъ выводовъ, наука не можетъ совершенно забыть о пользѣ, приносимой ею посредственно. Въ глубинѣ сознанія всякаго безкорыстнаго дѣятеля науки живетъ мысль о томъ, что его работа содѣйствуетъ благу и счастью людей, и что въ этомъ смыслѣ она полезна. Отымите у него это сознаніе; пусть онъ придетъ къ убѣжденію, что его работа абсолютно безполезна для блага общества; найдется ли человѣкъ, кромѣ душевно-больного, который сталъ бы продолжать такую работу? Какъ бы далеко ни отстояло практическое приложеніе къ жизненнымъ задачамъ отъ выводовъ науки, какіе промежутки времени или рядъ промежуточныхъ звеньевъ ни раздѣляли ихъ, въ конечномъ счетѣ только въ отношеніи къ жизненнымъ фактамъ наука находитъ свое оправданіе, свое право на существованіе. Съ идеальной стороны задача науки—разысканіе истины; но эта истина существуетъ только въ мірѣ фактовъ, или какъ согласіе теоретическихъ построеній съ конкретной дѣйствительностью, или какъ осуществленіе того, что мы считаемъ за истину въ нашемъ поведеніи: наука, которая стоитъ выше или внѣ фактовъ, которая не имѣетъ никакого отношенія къ нимъ и не оказываетъ вліянія на наше поведеніе въ человѣческомъ общежитіи, такая наука, въ случаѣ, если бы она была возможна, практически для насъ не существовала бы. Она могла бы служить предметомъ развлеченія, какъ, напримѣръ, теорія шахматной игры или филателія, но никогда не служила бы факторомъ прогресса.

Въ служеніи на пользу человѣчества еще Бэконъ Веруламскій полагалъ достоинство науки. Наука для науки—такое же уродливое явленіе, какъ и искусство для искусства. Наука, какъ искусство, какъ и все, созданное человѣкомъ, служитъ для человѣка, для его нуждъ и потребностей, для улучшенія

его жизни и расширенія его счастья, для приближенія его къ идеальному состоянію. Поэтому нѣтъ самодовлѣющей науки. Всякая наука сама по себѣ имѣетъ только служебное значеніе, какъ способъ познанія одной изъ сторонъ единой Великой Истины, къ полному познанію которой стремится вся ихъ совокупность, какъ одинъ изъ способовъ осуществить идеальное состояніе на землѣ. Такимъ образомъ, только въ связи съ другими науками и въ служеніи ихъ всѣхъ вмѣстѣ на пользу человѣка наука обрѣтаетъ свое достоинство и значеніе. Замыкаясь въ ограниченную область своихъ собственныхъ понятій и представленій, становясь внѣ этой взаимной связи и внѣ отношеній къ міру конкретныхъ фактовъ и обширной области человѣческихъ дѣйствій, какъ отдѣльная наука, такъ и все наше знаніе превращается въ безплодную игру ума: вмѣсто реальныхъ вещей и отношеній между вещами предметомъ изученія дѣлаются ихъ словесные символы и отношенія между словами, т. е. возникаетъ вербализмъ и формализмъ, все то, чѣмъ характеризуется схоластика.

Требованіе, чтобы наука считалась съ реальными фактами и служила на пользу человѣчества, не слѣдуетъ понимать въ томъ смыслѣ, чтобы дѣятель науки въ своихъ изслѣдованіяхъ непремѣнно руководился этой цѣлью. Наука не представляетъ результата планомѣрной дѣятельности человѣческаго ума; она развивается черезъ посредство людей, но помимо ихъ воли и намѣреній. Каждый отдѣльный изслѣдователь не знаетъ, къ чему приведутъ его изысканія въ избранной имъ области науки; еще менѣе онъ знаетъ то, какъ отразятся его открытія въ умахъ его современниковъ и будущихъ поколѣній, какія возбудятъ въ нихъ мысли и къ какимъ приведутъ результатамъ. Ученый, правда, ставитъ себѣ цѣль изслѣдованія; но достигнетъ ли онъ ея, или, напротивъ, не приведутъ ли его изысканія къ чему-либо совершенно для него неожиданному,— для него неизвѣстно. Ассоціированье и возникновеніе мыслей въ душѣ человѣка совершается непроизвольно, въ зависимости отъ внѣшнихъ условій и отъ комплекса идей, образовъ, представленій и чувствованій, имѣющихся въ душѣ, или, по выраженію Гербарта, отъ апперцепціонной массы души. Поэтому

не правъ Бэконъ, считая задачей научной дѣятельности умноженіе полезныхъ изобрѣтеній: всякое изобрѣтеніе такъ же непроизвольно, какъ и любая мысль, возникающая въ душѣ человѣка. Но такъ какъ научная мысль развертывается, хотя и не произвольно, но въ зависимости отъ психическаго содержанія, то является въ высшей степени важнымъ, что бы въ числѣ другихъ, въ душѣ содержалась и правильная идея о характерѣ научной дѣятельности и о значеніи науки въ общемъ культурномъ движеніи человѣчества.

Примѣнимъ всѣ эти мысли къ педагогическому дѣлу. Если школьное преподаваніе не составляетъ самой цѣли, если въ школѣ *желательно учить не для школы, а для жизни*, если въ ея задачу входитъ не только снабженіе воспитанника знаніями, но и выработка изъ него личности, обладающей извѣстнымъ міровоззрѣніемъ, живущей въ обществѣ и способной творить и дѣйствовать, т. е. пользоваться своими знаніями, то школьное преподаваніе должно быть поставлено такъ, что бы въ немъ проводилась такая же тѣсная связь между абстрактнымъ и конкретнымъ, которая характеризуетъ научную дѣятельность. Необходимо, чтобы наши воспитанники поняли, что конкретные факты—единственная истина, доступная намъ вполнѣ; что они представляютъ основу нашихъ абстракцій и теорій и instantiam crucis для ихъ провѣрки; что всякая теорія содержитъ только частичную истину, и ни одна не можетъ представить ее во всей полнотѣ; что поэтому всякая теорія есть только ступень къ достиженію истины и имѣетъ только временное значеніе. Въ то же время они должны помнить, что одни факты еще не даютъ научнаго значенія, потому что оно состоитъ не въ одномъ знаніи фактовъ, но и въ установленіи между ними той или иной связи, которая дается теоріей; что поэтому ни теорія безъ фактовъ, ни факты безъ теоріи не имѣютъ значенія. Мы должны пріучить нашихъ воспитанниковъ къ постоянной провѣркѣ теоретическихъ построеній на ихъ согласіе съ дѣйствительностью; внушить имъ необходимость добросовѣстнаго признанія факта и уваженія къ нему, какъ къ высшей силѣ, отмѣнить которую никто не въ

силахъ [1]). Съ другой стороны, мы должны выработать въ нихъ уваженіе къ теоріи, которая одна даетъ смыслъ фактическому содержанію; но въ то же время должны предохранить ихъ отъ переоцѣнки теорій, отъ привычки къ категорическимъ сужденіямъ безъ достаточнаго и всесторонняго изслѣдованія фактовъ, по отношенію къ которымъ онѣ высказываются. Правильное пониманіе соотношенія между теоріями и фактами и правильная оцѣнка значенія тѣхъ и другихъ составляетъ основу научнаго скептицизма, весьма важнаго не только въ наукѣ, но и въ жизни. Мы должны вооружить имъ нашихъ воспитанниковъ съ тѣмъ, чтобы они не принимали безъ критической оцѣнки ни факта, ни теоріи, но привыкли провѣрять факты на ихъ согласіе съ теоріей, какъ теоріи—на ихъ согласіи съ фактами, чтобы они пріучились преклоняться передъ фактомъ, признавши послѣ добросовѣстнаго изслѣдованія его неоспоримость, и могли мужественно отказываться отъ теоріи въ случаѣ ея несогласія съ достовѣрнымъ фактомъ; наконецъ, мы должны вызвать въ нашихъ воспитанникахъ сознаніе того, что наука не пустая игрушка, но что она служитъ великимъ цѣлямъ—розысканію истины и созданію лучшихъ культурныхъ условій для жизни людей.

Каждая личность достигаетъ полнаго, возможнаго для нея духовнаго развитія только благодаря соціальной средѣ; работая въ человѣческомъ общежитіи, содѣйствуя благу и счастью другихъ людей, расширяя ихъ силы, личность строитъ и собственное счастье и расширяетъ собственныя силы. Ея назначеніе — активная жизнь, дѣятельность въ какой бы то ни было области — практической или умственной. Только въ такой дѣятельности она достигаетъ полноты духовнаго и въ частности умственнаго развитія, а не въ изученіи книжныхъ формулъ и не въ умственной гимнастикѣ. Во всѣхъ случаяхъ плодотворность дѣятельности стоитъ въ прямомъ соотношеніи съ широтою взглядовъ, ее направляющихъ. Широта же взгляда есть такая точка зрѣнія на вещи,

---

[1]) Признаніе факта есть утвержденіе: «что есть, то есть», и не означаетъ непремѣнно примиренія съ нимъ.

которая принимаетъ во вниманіе не одну или немногія, но возможно большее число ихъ сторонъ, т. е. стремится разсматривать вещи не изолированно или въ немногихъ ихъ связяхъ съ другими вещами, но во всей совокупности ихъ отношеній ко всѣмъ другимъ вещамъ и фактамъ; но эта способность видѣть и принимать во вниманіе всю многосторонность отношеній каждаго факта и есть ничто иное, какъ умственное развитіе. Такимъ образомъ, умственное развитіе оказывается неотдѣлимымъ отъ знакомства съ вещами и отношеніями конкретнаго міра. Подготовляя воспитанника къ плодотворной практической дѣятельности, мы вводимъ его въ пониманіе конкретныхъ фактовъ и обезпечиваемъ вмѣстѣ съ этимъ и его умственное развитіе; точно также и въ области умственной дѣятельности умственное развитіе основывается на конкретномъ содержаніи, потому что истинная наука никогда не упускаетъ изъ вида своего отношенія къ конкретной дѣйствительности.

Такимъ образомъ, чтобы достигнуть педагогическихъ и общественныхъ цѣлей, имѣющихъ въ виду выработку людей, способныхъ дѣйствовать и быть живыми и полезными членами общества, обладающими нужнымъ для этого душевнымъ развитіемъ, необходимо, чтобы преподаваніе въ цѣломъ, общее его направленіе отводило видное мѣсто конкретному содержанію, а не изгоняло его такъ тщательно, какъ это часто наблюдается теперь. Если ошибоченъ взглядъ, по которому требованіе жизненности и реальности учебнаго матеріала означаетъ признаніе за наивысшую задачу образованія утилитарную цѣль, то также глубоко ошибоченъ и другой взглядъ, смѣшивающій заботу о конкретномъ содержаніи съ матеріалистическимъ направленіемъ преподаванія; проводникомъ этого мнѣнія былъ графъ Д. А. Толстой, но оно не вполнѣ отвергнуто и въ настоящее время. «Вопросъ между древними языками, какъ основой всего дальнѣйшаго научнаго образованія, и всякимъ другимъ способомъ обученія есть вопросъ не только между серьезнымъ и поверхностнымъ ученіемъ, но и вопросъ между нравственнымъ и матеріалистическимъ направленіемъ обученія и воспитанія, а слѣдовательно и всего общества»,

писалъ графъ Д. Толстой въ 1871 году. Изъ-за той же матеріалистической опасности вліятельные члены Государственнаго Совѣта высказывались въ 1872 году противъ уравненія въ правахъ реальныхъ училищъ съ гимназіями; изъ-за этого же опасенія учебный планъ гимназій 1872 года, вводя изученіе древнихъ языковъ, на первое мѣсто выдвигалъ ихъ грамматику, а не содержаніе твореній великихъ писателей древности. Но если здѣсь изгонялось реальное содержаніе, то въ другихъ случаяхъ, гдѣ по существу нельзя было его избѣгнуть, стремились обезвредить его изгнаніемъ всякой теоріи, всякаго обобщенія. Эта тенденція ясно выражена, напримѣръ, въ опубликованной Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія въ 1893 г. программѣ для составленія учебника естественной исторіи на соисканіе преміи Императора Петра Великаго. Первымъ и главнѣйшимъ дѣломъ въ естественной исторіи, говорится здѣсь, должно быть изученіе естественной системы; анатомическія свѣдѣнія нужно сообщать лишь въ той мѣрѣ, въ какой они надобны для системы. Конечно, система важна и необходима; но если она ставится какъ конечная цѣль изученія, то результатомъ является формализмъ, который ведетъ не къ развитію учащагося, а къ его отупѣнію. Изгнаніе изъ преподаванія конкретнаго содержанія или его обезвреживаніе выдвиганіемъ на первый планъ формы убиваетъ чутье реальнаго и жизненнаго и дѣлаетъ изъ воспитанниковъ «безплодныхъ мечтателей», рабовъ теоретическихъ построеній, упорныхъ доктринеровъ, не считающихся съ фактами, въ своей практической дѣятельности одинаково вредныхъ и тогда, когда ихъ теоріи ложны, и тогда, когда онѣ истинны; при столкновеніи съ жизненными фактами всякая теорія, даже обоснованная и выведенная изъ неоспоримыхъ фактовъ, должна примѣняться къ специфической, особенной, никогда не повторяющейся ихъ комбинаціи и соотвѣтственно съ этимъ видоизмѣняться и претерпѣвать ограниченія—понять же это, воспитанные на однихъ теоретическихъ умозрѣніяхъ и на словесныхъ формулахъ никогда не будутъ въ силахъ. Только связь абстрактнаго съ конкретнымъ, ихъ взаимное проникновеніе въ состояніи первому придать практическую приложимость, а второму — смыслъ и значеніе.

Математика представляетъ ту особенность сравнительно съ другими науками, что ея содержаніе наиболѣе отвлеченно и наиболѣе далеко отъ конкретнаго міра. Ея научное зданіе строится изъ собственнаго матеріала, которымъ являются немногія аксіомы, опредѣленія и условія, и для сооруженія его она не нуждается, повидимому, ни въ конкретномъ матеріалѣ, доставляемомъ другими науками, ни въ опытной провѣркѣ своихъ выводовъ; болѣе, чѣмъ всякая другая наука, математика представляетъ собою идеальное построеніе, такъ какъ все ея содержаніе—одна теорія. Находясь, такимъ образомъ, въ полной, повидимому, независимости отъ другихъ наукъ, какъ въ отношеніи своего матеріала, такъ и своихъ обобщеній, математика наиболѣе склонна принять характеръ самоцѣли, самодавлѣющей науки, особенно въ школьномъ преподаваніи, и превращаться, такимъ образомъ, въ безполезную игрушку.

Однако, математика отличается и съ другой стороны отъ остальныхъ наукъ. Именно, математика изучаетъ измѣряемую сторону всѣхъ явленій міра; поэтому, если ея конкретное содержаніе ничтожно, то приложеніе ея къ изученію конкретнаго міра безпредѣльно. Въ этомъ ея сила и значеніе. Замыкаясь въ свою собственную область математическихъ символовъ, математика оказывается, можетъ быть, и удивительной по тонкости своего анализа наукой, но зато и вполнѣ безполезной; напротивъ, въ своихъ приложеніяхъ она дѣлается наиболѣе значительной наукой, распространяющей свое главенство на всѣ остальныя. Такимъ образомъ, математика, чтобы быть факторомъ прогресса, должна, подобно другимъ наукамъ, не замыкаться въ кругъ собственныхъ понятій, превращаться въ самоцѣль, но помнить о своемъ служебномъ значеніи для достиженія высшей цѣли — открытія истины; она не должна чуждаться конкретныхъ и жизненныхъ фактовъ; не должна упускать изъ виду, что ея достоинство и оправданіе заключается въ служеніи нуждамъ человѣческаго общества. Но въ школьномъ преподаваніи всѣ эти простыя истины обыкновенно забываются, и школьная математика носитъ на себѣ ясный отпечатокъ схоластицизма, т. е. удаленности отъ жизни и полной безполезности.

Въ болѣе широкомъ смыслѣ схоластицизмъ—это рутина въ области мысли. Онъ возникаетъ всякій разъ, когда научное мышленіе перестаетъ соотвѣтствовать потребностямъ и задачамъ времени. Если наука и жизнь опередили движеніе мысли, то наступаетъ разрывъ между содержаніемъ науки и потребностями жизни, въ томъ числѣ и жизненными потребностями самой науки. Въ то время, какъ передовые дѣятели науки двигаютъ ее по пути новыхъ завоеваній, въ высшей школѣ часто продолжаютъ еще господствовать приверженцы старыхъ взглядовъ, пережевывающіе давно отвергнутыя схемы, а въ средней школѣ, несвободной къ тому же въ своей дѣятельности, безраздѣльно царятъ старые методы и старое содержаніе. Представляя въ свое время прогрессивное явленіе, пришедшее на смѣну отжившей мысли, всякое научное направленіе можетъ превратиться въ схоластику, если оно упорно продолжаетъ держаться стараго и не считается съ новыми запросами жизни. Такъ, то направленіе, которое называется схоластикой въ тѣсномъ смыслѣ, было прогрессивнымъ направленіемъ въ свое время; въ періодъ времени отъ Абеляра до Оккама оно вполнѣ отвѣчало запросамъ жизни, и терминъ «схоластика» не имѣлъ тогда того оттѣнка, который онъ принялъ впослѣдствіи. Точно также и направленіе эпохи возрожденія, потому смѣнившее схоластику, что лучше ея отвѣчало потребностямъ времени, было прогрессивнымъ явленіемъ; но для насъ оно является теперь въ общемъ схоластическимъ. Было бы схоластикой—не считаться въ настоящее время съ біологическимъ направленіемъ въ естествознаніи и, оставаясь въ кругѣ идей Линнея, полагать въ изученіи систематики всю задачу наукъ о природѣ. Во всѣхъ случаяхъ характеризуетъ схоластику несоотвѣтствіе запросамъ жизни, оторванность отъ ея стремленій и очередныхъ задачъ, и, какъ слѣдствіе этого, преобладаніе вербализма и формализма; въ оправданіе схоластицизма появляются и педагогическія теоріи, усматривающія въ формальномъ развитіи ума главную задачу воспитанія. Такимъ образомъ, схоластицизмъ въ преподаваніи зависитъ отъ общей причины—неистребимой склонности человѣческаго ума къ консерватизму и рутинѣ.

Въ частности, схоластицизмъ школьной математики объясняется историческими условіями ея проникновенія въ школу. Школа періода схоластики и эпохи возрожденія не чувствовала потребности въ изученіи математики: какъ учебный предметъ, она впервые (такъ какъ нельзя считать за математику ариометику triviumа) была введена въ свѣтскія школы, основанныя купеческими обществами и гильдіями подъ давленіемъ потребностей жизни, главнымъ образомъ, торговыхъ интересовъ. Но и впослѣдствіи математика съ трудомъ пробивала себѣ дорогу въ школу: и удалось ей утвердиться въ ней вначалѣ только подъ флагомъ науки формальнаго характера, содѣйствующей формальному развитію ума. Эти условія опредѣлили какъ ея содержаніе, такъ и формальный и отвлеченный методъ ея преподаванія, вплоть до настоящаго времени.

Я не буду входить въ разсмотрѣніе того, какъ отражается рутина на современномъ преподаваніи математики, такъ какъ это не входитъ въ мою задачу. Оставивъ въ сторонѣ ея собственное, математическое содержаніе, я остановлюсь на разсмотрѣніи приложеній математики въ школѣ, т. е., на содержаніи задачъ, разрѣшаемыхъ учащимися, такъ какъ на нихъ наиболѣе ясно можно видѣть удаленность школьной математики отъ жизни и формальный характеръ ея преподаванія

Наиболѣе сильно сказывается традиція на преподаваніи ариометики. Отъ тѣхъ отдаленныхъ временъ, когда въ началѣ XII в. былъ открытъ въ Италіи рядъ городскихъ школъ купеческими обществами, дошло до насъ переполненіе задачниковъ по ариометикѣ задачами на куплю-продажу различныхъ товаровъ, главнымъ образомъ, чаю, сахару, кофе, сукна, шелка и бархата. Тогда подобныя задачи имѣли жизненное значеніе, но теперь онѣ стоятъ далеко отъ интересовъ и будущей дѣятельности нашихъ воспитанниковъ, которые, вѣроятно, только въ рѣдкихъ случаяхъ будутъ заниматься мелочной торговлей. Потребностями торговли были вызваны и задачи на проценты, занимающія столь видное мѣсто въ нашихъ задачникахъ; но всѣ подобныя задачи правильнѣе было бы отнести въ курсъ коммерческой ариометики, чѣмъ забивать ими головы мало-

лѣтнихъ школьниковъ, не могущихъ составить себѣ никакого представленія о капиталѣ, наростаніи его изъ процентовъ, о векселяхъ, о коммерческомъ и особенно о математическомъ учетѣ, нигдѣ, кромѣ школьныхъ задачниковъ, не практикующемся. Изъ тѣхъ же временъ дошло до насъ множество «правилъ» простого и сложнаго тройного (есть даже семерного, двадцатерного), смѣшенія, процентовъ, учета векселей, товарищества, *пропорціональнаго дѣленія*; сюда же *можно было бы* отнести правило бассейновъ, курьеровъ, стаи гусей и т. п. Въ учебникѣ Lionarbo Fibonacci 1202 года приводятся еще правила сплавовъ, слѣпого, дѣвицъ, пьяницъ, двухъ человѣкъ съ динаріями, находки кошелька, путешественниковъ, и пр., и пр. — столько же правилъ, сколько задачъ. Въ настоящее время въ задачникахъ сохраняются многочисленные слѣды подобныхъ правилъ: можно ли оправдать это? Въ XIII в. такіе пріемы были понятны, потому что тогда алгебра была только въ зачаткѣ, и общіе способы рѣшенія задачъ не были выработаны; но пользоваться теперь частными пріемами, въ то время когда существуютъ обобщенные способы, представляетъ чистую схоластику.

Частные способы представляютъ спеціальную догадку на спеціальный случай; люди, не обладающіе знаніемъ общихъ способовъ, любятъ упражнять свою догадливость въ нахожденіи рѣшенія подобныхъ частныхъ задачъ, подобно тому, какъ всѣ первобытные народы, а также и дѣти, любятъ загадки. Сборникъ такихъ задачъ на догадливость представляетъ сочиненіе Bachet «Problemes plaisants et délectables» (3-ье изданіе Labosne'a 1874 г.)[1]. Характерно самое заглавіе задачъ, которое часто начинается со слова deviner. Вотъ примѣръ одной задачи: тремъ ревнивымъ мужьямъ пришлось однажды ночью переправляться вмѣстѣ со своими женами черезъ рѣку, причемъ они нашли только маленькую лодочку безъ перевозчика, настолько узкую, что она могла вмѣстить только двухъ человѣкъ; спрашивается, какъ могутъ эти шесть человѣкъ переѣхать попарно, такъ чтобы ни разу ни одна жена не оставалась въ обществѣ одного или двухъ чужихъ мужей въ от-

[1]) 1-ое изд. 1612 г., 2-ое 1624 г.

сутствіи собственнаго мужа? Теперь такія задачи не входятъ, конечно, въ наши задачники, но ихъ главная цѣль—развивать догадливость—сохранилась въ нихъ и теперь неприкосновенною. Однако, можно подвергнуть сомнѣнію, развивается-ли въ учащихся догадливость рѣшеніемъ подобныхъ задачъ, и не запоминаютъ ли они просто шаблоны для ихъ рѣшенія, какіе представляютъ, напримѣръ, правила смѣшенія, товарищества, пропорціональнаго дѣленія? Во вторыхъ, если и развивается догадливость, то имѣетъ ли она какое-нибудь значеніе для душевнаго развитія? Въ третьихъ, составляетъ ли эта догадливость математическое развитіе, и можно ли ставить цѣлью преподаванія математики развитіе такой догадливости? На всѣ три вопроса, мнѣ кажется, слѣдуетъ отвѣтить отрицательно. Эти вопросы составляютъ часть другого болѣе общаго вооса о формальномъ развитіи. Современное его рѣшеніе состоитъ въ томъ, что человѣкъ представляетъ собою орудіе для спеціальныхъ реакцій на спеціальныя воздѣйствія; поэтому, упражненіе въ извѣстной области даетъ человѣку развитіе именно въ этой области, а не во всѣхъ. Упражненіе учащихся въ задачахъ на догадливость поведетъ или къ тому, что они механически запомнятъ пріемы для ихъ рѣшенія, или же—въ лучшемъ случаѣ—къ тому, что они пріобрѣтутъ навыкъ въ рѣшеніи подобныхъ задачъ, что нисколько не гарантируетъ такого же навыка и умѣнія въ рѣшеніи задачъ другого рода, напримѣръ, алгебраическихъ или геометрическихъ, а тѣмъ болѣе въ рѣшеніи задачъ изъ другихъ областей знанія или же задачъ жизненнаго характера. Точно также, упражняясь въ рѣшеніи ребусовъ, можно достигнуть высокаго развитія въ этой области и оставаться безпомощнымъ въ другихъ случаяхъ, когда то же требуется догадливость, или, лучше сказать, изобрѣтательная, творческая сила. Это ложное убѣжденіе въ томъ, что рѣшеніе задачъ на догадливость развиваетъ математическія способности, порождаетъ взглядъ, что необходимо во что бы то ни стало требовать отъ учащихся рѣшенія задачъ ариѳметическимъ путемъ даже и въ томъ случаѣ, если они безъ затрудненія могли бы рѣшить ихъ алгебраическимъ путемъ. Не схоластично ли требованіе поль-

зоваться худшимъ способомъ, когда мы знаемъ лучшій? Почему тогда не требовать отъ учащихся, что бы они производили ариѳметическія дѣйствія надъ числами, изображая ихъ непремѣнно римскими цифрами? Вѣдь пользованіе римскими цифрами несомнѣнно развивало бы извѣстную ловкость и догадливость, правда, только въ ихъ примѣненіи. Наконецъ, не дѣло математики развивать догадливость, потому что ея цѣли гораздо значительнѣе и выше. Допустимо ли пользоваться этимъ замѣчательнымъ орудіемъ изслѣдованія природы для рѣшенія безполезныхъ и никому не нужныхъ вопросовъ и курьезныхъ случаевъ?

Стремленіе развивать умъ съ формальной стороны и ложное убѣжденіе въ томъ, что эта цѣль достигается упражненіями на задачахъ, для рѣшенія которыхъ нужно догадаться примѣнить какой-нибудь особый пріемъ, или же вообще преодолѣть большія трудности, ведетъ къ появленію задачъ съ нарочито запутаннымъ и темнымъ условіемъ. Такія задачи существовали уже въ очень отдаленныя времена и стремленіе составлять ихъ не исчезло и въ наше время. Мнѣ пришлось слышать отъ одного учителя математики, что слишкомъ большая легкость рѣшенія задачъ можетъ развить въ учащихся неуваженіе къ математикѣ, какъ слишкомъ легкой наукѣ. Вотъ примѣръ вліянія рутины (и въ то же время непониманія психологіи и задачъ педагогики).

Такимъ образомъ, въ результатѣ убѣжденія въ необходимости формальнаго развитія, а также традиціи, идущей отъ тѣхъ временъ, когда математика примѣнялась только для коммерческихъ надобностей, появилась общая черта задачъ, на которыхъ упражняются наши ученики—ихъ удаленность отъ жизни. Правда, матеріалъ ихъ почерпается изъ жизни, но жизненные факты берутся въ такихъ сложныхъ и странныхъ сочетаніяхъ, въ которыхъ они никогда не встрѣчаются въ жизни. Типическій образецъ крайняго удаленія отъ жизни представляетъ извѣстный алгебраическій задачникъ, съ которымъ, конечно, всѣ преподаватели математики знакомы, такъ какъ, повидимому, онъ пользуется значительнымъ распространеніемъ, судя потому, что онъ вышелъ уже седьмымъ изда-

піемъ. Чтобы дать оцѣнку этому задачнику, достаточно только вообразить себѣ, что вы попали въ городъ, всѣ жители котораго получили свое математическое образованіе по системѣ автора задачника (а это необходимо допустить, потому что въ задачникѣ занимаются математическими вычисленіями даже извозчики). Вы спрашиваете на вокзалѣ у извозчика, сколько онъ возьметъ довезти васъ до гостинницы, и получаете въ отвѣтъ требованіе уплатить ему число копѣекъ, удовлетворяющее уравненію $\sqrt[4]{2}^{\sqrt{x-1}} + \sqrt{2}^{\sqrt[x-1]{x+1}} = 6$ за вычетомъ столькихъ копѣекъ, сколько единицъ въ коэффиціентѣ того члена разложенія $(\sqrt[5]{a^3} + \sqrt[5]{a^4})^7$ по биному Ньютона, который содержитъ $a^{5,9}$. Вы приходите въ магазинъ купить себѣ полотна и на вопросъ о стоимости его получаете подобный же отвѣтъ, требующій для разрѣшенія его нѣсколькихъ часовъ времени. Не скажете ли вы, что фантазія автора уже предвосхищена Джонатаномъ Свифтомъ въ его описаніи жителей острова Лапуты, гдѣ портной, чтобы сшить платье, снимаетъ мѣрку только съ большого пальца и размѣры платья вычисляетъ затѣмъ при помощи высшихъ отдѣловъ математики (причемъ платье оказывается никуда не годнымъ, такъ какъ въ вычисленія вкралась ошибка)? Такой задачникъ представляетъ профанацію математики; пользоваться биномомъ Ньютона для разсчетовъ съ извозчиками все равно, что взвѣшивать на химическихъ вѣсахъ говядину на базарѣ, или употреблять античную вазу, какъ печной горшокъ. Нельзя даже сказать, что бы задачникъ этотъ сдѣлался болѣе пригоднымъ для употребленія, если бы уничтожить въ немъ весь текстъ и оставить только численные примѣры; это не составило бы большого его улучшенія, потому что въ немъ примѣняются различные отдѣлы алгебры въ столь прихотливыхъ и неестественныхъ сочетаніяхъ, въ какихъ они навѣрное не сопоставляются ни при какомъ научномъ изслѣдованіи реальнаго, а не выдуманнаго вопроса. Съ этой стороны задачникъ вызываетъ въ памяти другого англійскаго юмориста, въ разсказѣ котораго нѣкій господинъ, составляя отъ нечего дѣлать упраж-

ненія для перевода на французскій языкъ, придумалъ между прочимъ такую фразу для повторенія пройденнаго: «Пришелъ громадный левъ и съѣлъ яблоки, садовника, тетку жены моего двоюроднаго дяди, сапоги, ваксу и сапожную щетку».

Другого рода несоотвѣтствіе съ реальными отношеніями встрѣчается даже въ лучшихъ задачникахъ. Напримѣръ, у Гольденберга [1]) въ числѣ задачъ на составныя именованныя числа встрѣчаются такія, въ которыхъ величина дается съ точностью до ничтожно-малыхъ долей сравнительно со всей величиной. Напримѣръ, № 587. 29 кв. верстъ 34 кв. фута раздѣлить на 8; но что́ значитъ площадь въ 34 кв. фута сравнительно съ площадью въ 29 кв. верстъ, или 355.250.000 кв. футовъ? Гдѣ можно встрѣтить измѣреніе площадей въ квадратныя версты съ точностью до квадратныхъ футовъ? № 405. Изъ 90 пудовъ вычесть 57 пудовъ 25 фунтовъ 24 золотника; эти 24 золотника при 90 пудахъ имѣютъ значеніе развѣ только при учетѣ золота въ золотосплавочной лабораторіи; точно также счетъ секундъ при нѣсколькихъ суткахъ (№ 415) можетъ встрѣтиться только при астрономическихъ вычисленіяхъ. Подобныя задачи вселяютъ въ сознаніе учащихся превратныя представленія о реальныхъ соотношеніяхъ. Сюда же относится употребленіе для обыкновенныхъ цѣлей логариѳмовъ съ 7 десятичными знаками, тогда какъ точность, достигаемая съ ними, требуется только въ астрономическихъ вычисленіяхъ и представляется абсурдной въ примѣненіи къ обыкновеннымъ жизненнымъ случаямъ. Не примѣняется въ жизни превращеніе періодическихъ дробей въ простыя; сравнительно рѣдко встрѣчаются въ жизни конечные результаты ариѳметическихъ вычисленій, чаще же жизненныя задачи рѣшаются съ приближеніемъ; но на эту сторону въ учебникахъ не обращается вниманіе.

Въ результатѣ подобныхъ упражненій вырабатываются воспитанники, которые, можетъ быть, и наловчились въ рѣшеніи задачъ на бассейны, наполняемые водой и никогда не наполняющіеся, на курьеровъ, которые никогда не встрѣчаются

[1]) Гольденбергъ. Сборникъ задачъ и примѣровъ для обученія начальной ариѳметикѣ. Вып. II-й, изд. 32.

и не догоняютъ другъ друга, потому что теперь такіе курьеры не ѣздятъ, на смѣшеніе разныхъ сортовъ кофе такимъ способомъ, котораго никогда не примѣнялъ ни одинъ бакалейный торговецъ, на раздѣлъ наслѣдства между братьями, способомъ, который могутъ примѣнять развѣ только ненормальные люди; но зато эти воспитанники оказываются лишенными всякаго чутья реальныхъ соотношеній, вытравленнаго изъ нихъ долгими упражненіями надъ искусственными и нелѣпыми задачами. Всякій житейскій или научный вопросъ люди, воспитанные на подобныхъ пріемахъ, рѣшаютъ исключительно какъ математическую задачу, нисколько не заботясь о томъ, въ какой степени полученный ими результатъ соотвѣтствуетъ дѣйствительности. Примѣровъ такой аберраціи ума учащихся можно привести сколько угодно; всякій преподаватель математики знаетъ такіе примѣры и изъ собственной практики, и изъ литературы. Въ одной, кажется, французской статьѣ я читалъ объ ученикѣ, который, рѣшая задачу, сколько потребуется почтовыхъ марокъ для оклейки стѣны, получилъ въ результатѣ единицу съ дробью и добросовѣстно продолжалъ вычисленіе до десятаго десятичнаго знака и продолжалъ бы вѣроятно вычислять и далѣе, если бы его не остановилъ учитель. Изъ собственной практики я знаю, какъ трудно заставить учащихся давать себѣ отчетъ въ вѣроподобности получаемыхъ ими результатовъ. Опредѣляя въ IV классѣ отношеніе киллограмма къ фунту, ученица получаетъ два раза около 2,45 и одинъ разъ 0,03 и, не задумываясь, выводитъ изъ всѣхъ трехъ чиселъ среднее. Представленіе о единицахъ измѣренія у большинства отсутствуетъ. Профессоръ механики разсказывалъ мнѣ, какъ одинъ студентъ сказалъ ему на экзаменѣ, что метръ равенъ четверти земного меридіана и, сдѣлавъ эту ошибку, съ улыбкой отвѣтилъ на вопросъ профессора, что какъ же метръ можетъ помѣститься въ экзаменаціонной комнатѣ, если онъ такой большой.

Но не слѣдуетъ обвинять учащихся и смѣяться надъ ихъ глупостью; они на самомъ дѣлѣ вовсе не такъ глупы, какъ кажется. Дѣло въ томъ, что наши методы не только не развиваютъ чутья реальнаго, но даже убиваютъ его; между тѣмъ,

эта способность вовсе не такъ обыкновенна среди людей и требуетъ упражненія для своего развитія. Задача математики въ школѣ состоитъ вовсе не въ томъ, чтобы научиться рѣшать фокусныя задачи, и вовсе не въ этомъ умѣніи состоитъ математическое развитіе; нѣтъ, оно состоитъ въ особомъ расположеніи души—въ привычкѣ смотрѣть на окружающій міръ съ точки зрѣнія количественныхъ отношеній, и затѣмъ, конечно, въ извѣстной технической ловкости въ обращеніи съ числами и формулами; къ достиженію этихъ цѣлей, придавая преобладающее значеніе первой, и должно стремиться преподаваніе математики въ школѣ; тогда, конечно, сдѣлаются невозможными случаи, вродѣ приведенныхъ.

Въ то время, когда математика только начинала проникать въ школы, изученіе явленій природы было въ зачаточномъ состояніи и совершалась только эмпирическимъ, но не научнымъ методомъ; запасъ реальныхъ знаній научной цѣнности былъ въ то время очень невеликъ. Поэтому единственное почти примѣненіе математики заключалось только въ рѣшеніи задачъ на коммерческія сдѣлки и было почти исключительно утилитарнымъ. Но съ тѣхъ поръ наука совершила громадныя завоеванія. Подъ вліяніемъ расширившагося изученія природы развивалась и математика и изобрѣтала новые методы. Безъ астрономическихъ трудовъ Кеплера не было бы, быть можетъ, дифференціальнаго исчисленія, на нашихъ глазахъ требованія политической экономіи, статистики и естественныхъ наукъ вырабатываютъ новые методы въ теоріи вѣроятностей. Такимъ образомъ, передъ математикой стоятъ теперь другія задачи, чѣмъ тѣ, которыя стояли передъ ней когда-то. Математика является теперь необходимымъ орудіемъ познанія міра, качественное знаніе съ развитіемъ математики постепенно смѣняется количественнымъ, индуктивный методъ изслѣдованія стремится перейти въ дедуктивный. Всѣ вещи въ мірѣ имѣютъ количественную сторону и подлежатъ измѣренію, начиная со счета яблокъ въ корзинѣ торговки и вплоть до вычисленія движенія небесныхъ тѣлъ и до механики атомовъ. Такимъ образомъ, поле приложенія математики безпредѣльно; мы не знаемъ, есть ли также предѣлъ и развитію ея мето-

довъ. Въ этомъ состоитъ значеніе математики, какъ всеобщей истолковательницы явленій міра, изученію котораго посвящаютъ себя всѣ остальныя науки. При такомъ пониманіи сущности и задачъ математики передъ преподавателемъ ея возникаетъ несравненно болѣе значительная, благодарная и завлекательная цѣль, чѣмъ натаскиваніе ученика въ рѣшеніи никому не нужныхъ, никогда и нигдѣ не встрѣчающихся, безполезныхъ, нелѣпыхъ и скучныхъ задачъ. Нѣтъ, ему предстоитъ развить въ ученикѣ способность смотрѣть на міръ и оцѣнивать его явленія съ количественной точки зрѣнія; уяснить ему значеніе математики на его собственномъ опытѣ, какъ необыкновенно тонкаго орудія для ихъ изслѣдованія и установленія законовъ природы; дать ему почувствовать красоту порядка, вносимаго математикой въ наше представленіе о мірѣ, въ которомъ по словамъ поэта, «Богъ все распредѣлилъ по мѣрѣ, числу и вѣсу»; наконецъ, научить его пользоваться этимъ орудіемъ, но не для безполезныхъ и глупыхъ, а для благородныхъ и возвышенныхъ цѣлей. Какъ жалка и ничтожна въ сравненіи съ этой задачей школьная работа нашихъ учениковъ!

Для достиженія этой цѣли, конечно, имѣетъ большое значеніе и техническая ловкость, развиваемая рѣшеніемъ, такъ называемыхъ, примѣровъ; но сама по себѣ она не составляетъ конечной цѣли, и не для того, чтобы овладѣть ею должны ученики работать, подобно тому, какъ играютъ на роялѣ этюды не для нихъ самихъ, а для того, чтобы впослѣдствіи играть сонаты Бетховена. Для упражненія въ техническомъ навыкѣ нужно отвести въ задачникѣ мѣсто численнымъ и буквеннымъ примѣрамъ; но чтобы умѣнье рѣшать ихъ не превратилось въ самоцѣль, въ пустую форму, нужно дать преобладающее значеніе задачамъ съ содержаніемъ, которое должно быть тщательно подобрано. На этихъ задачахъ ученики будутъ пріучаться пользоваться математикой для приложеній, что и составляетъ ея главную задачу, если не считать ее за самоцѣль. Такъ какъ эти приложенія безпредѣльны, то нужно дать ихъ изо всѣхъ областей, доступныхъ ученику: изъ обыденной жизни, изъ наукъ, изучаемыхъ ученикомъ въ школѣ, изъ области

техники, статистики, политико-экономическихъ отношеній, товарообмѣна и т. д. и т. д. Не только не нужно, чтобы условія задачъ были запутаны и сложны, но даже необходимо, чтобы они были просты и понятны; не только излишни, но и вредны безконечныя передѣлки, которыми такъ любятъ щеголять наши задачники. Въ особенности важно соблюдать простоту и понятность на первыхъ ступеняхъ обученія. Нѣтъ ничего легче, какъ составить замысловатую задачу и на первыхъ же порахъ ошеломить ребенка мудренымъ условіемъ, вселивъ въ него этимъ самымъ на всю жизнь отвращеніе къ математикѣ. Гораздо труднѣе, но зато и почетнѣе для преподавателя, ввести ребенка постепенно, шагъ за шагомъ, безъ насилія въ міръ математическихъ символовъ, сдѣлавъ для него привычнымъ и пріятнымъ обращеніе съ ними. Необходимымъ условіемъ должно быть соотвѣтствіе содержанія задачъ съ реальными фактами; все искусственное, никогда небывалое или несуществующее теперь, должно быть устранено изъ нихъ; нужно, чтобы онѣ были отраженіемъ самой жизни въ ея теперешнемъ состояніи; чтобы онѣ будили интересъ ученика, обогощали его умъ свѣдѣніями и наталкивали его на новыя и самостоятельныя изслѣдованія явленій жизни и науки съ ихъ количественной стороны; ихъ руководящей идеей долженъ быть лозунгъ,—школа для жизни въ ея безконечно разнообразныхъ проявленіяхъ.

На всѣхъ ступеняхъ обученія содержаніе задачъ должно браться изъ круга близкихъ и доступныхъ ученикамъ понятій; но въ особенности это имѣетъ значеніе при началѣ обученія. Очень часто затрудняетъ учащихся не математическая сторона задачи, но отсутствіе реальныхъ представленій, необходимыхъ для пониманія ея содержанія. Какъ можетъ ученикъ приготовительнаго класса рѣшать задачу о числѣ буквъ, набираемыхъ наборщикомъ, если онъ никогда не видалъ работы въ типографіи? На первыхъ ступеняхъ обученія, когда учащіеся имѣютъ очень ограниченный запасъ реальныхъ свѣдѣній, содержаніемъ задачъ должны служить факты дѣтской жизни, наиболѣе имъ знакомые и близкіе ихъ интересамъ, постепенно содержаніе задачъ должно расширяться. По мѣрѣ того, какъ на урокахъ

міровѣдѣнія или отечественнаго языка учащіеся знакомятся съ новыми фактами съ ихъ качественной стороны, на урокахъ математики тѣ же факты могутъ изучаться съ ихъ количественной стороны. Такимъ образомъ, изученіе математики будетъ идти pari passu съ умноженіемъ свѣдѣній учащихся; такое же соотношеніе между математикой и другими науками должно соблюдаться и впослѣдствіи. Польза такой постановки дѣла очевидна; повтореніе и углубленіе на урокахъ математики вопроса, изученнаго на урокѣ другого учебнаго предмета, разсмотрѣніе его количественной стороны, служитъ какъ для лучшаго его усвоенія, такъ и для уясненія связи математики съ другими науками и ея значенія. Вездѣ, гдѣ только возможно, нужно пользоваться измѣреніями; разстоянія, длины, площади, вѣса, объемы должны оцѣниваться учащимися и на глазъ, и измѣряться посредствомъ приборовъ. Для этого въ классѣ должны быть всегда наготовѣ вѣсы, аршины, метры, измѣрительные цилиндры. Вмѣстѣ съ этимъ можетъ быть сведенъ до минимума тяжелый и скучный отдѣлъ объ именованныхъ числахъ. Можно много придумать задачъ, въ которыхъ дано только содержаніе, а числа должны доставить сами учащіеся. Сколько шаговъ отъ вашего дома до школы? Измѣрьте длину классной комнаты шагами, потомъ аршинами; найдите, сколькимъ вершкамъ равняется длина вашего шага и вычислите, сколько саженей отъ вашего дома до школы. Сколько понадобится кусковъ обоевъ для оклейки вашей комнаты? Сколько десятинъ занимаетъ ваша улица или часть ея, скверъ, въ которомъ вы играете. Кубическое содержаніе класса? вашей комнаты? сколько кубическихъ футовъ приходится на одного ученика? И проч., и проч. Примѣромъ задачъ, захватывающихъ жизненныя темы и приспособленныхъ къ интересамъ и пониманію дѣтей, можетъ служить напримѣръ задачникъ Hellermann'a и Krämer'a для городскихъ школъ, отдѣльныя тетради котораго вышли уже 232, 240 и даже 270 изданіемъ. Вотъ темы задачъ: 1-ый годъ; трудовая недѣля, рождественская елка, игры, сберегательная касса, почта, семья, жилище, кухня, ѣда и питье, мелкія покупки, школа. 2-ой годъ: часы, недѣля, годъ; деньги; садъ, поле, деревенскій дворъ; школа;

зданіе, книги, тетради, учебныя занятія, пропуски уроковъ; булочникъ, купецъ, переплетчикъ; домашняя жизнь. 3-ій годъ: доходы и расходы семьи, почтовыя марки, открытки. 4-ый изъ географіи: Берлинъ: число жителей, призрѣніе бѣдныхъ, движеніе иногороднихъ, пассажирское движеніе по городскимъ трамваямъ, почтовые обороты, бойни, городскія школы, городскіе доходы; провинція Бранденбургъ: населеніе, распредѣленіе земельныхъ угодій, сборъ хлѣбовъ; королевство Пруссія: площадь областей, населеніе; Германская Имперія: населеніе, распредѣленіе его по вѣроисповѣданію, внѣшняя торговля, имперскіе доходы и расходы; объ арміи; о защитѣ животныхъ (польза, приносимая ими); о скоростяхъ. 5-ый годъ: бумажныя деньги, запись дохода и расхода, росписаніе желѣзно-дорожныхъ поѣздовъ; изъ отчизновѣдѣнія, изъ географіи Европы. Подобнымъ же образомъ усложняется содержаніе задачъ и въ послѣдующіе годы [1]).

По мѣрѣ того, какъ учащіеся подвигаются въ классахъ и увеличивается запасъ ихъ фактическаго знанія, должны доставлять матеріалъ для задачъ новые, изучаемые ими, предметы. Очень хорошо, если въ младшихъ классахъ ведутся практическія занятія по естественной исторіи и проходится наглядная или интуитивная геометрія; въ этомъ случаѣ можно сильно увеличить разнообразіе задачъ. Много темъ даютъ факты изъ жизни животныхъ и растеній, сообщаемые на урокахъ естественной исторіи. Вычислить потомство мухи въ теченіе лѣта; сколько гусеницъ или насѣкомыхъ съѣстъ въ теченіе лѣта пѣвчая птичка или ласточка; самъ сколько далъ урожай хлѣба— вотъ примѣры такихъ задачъ. Наглядная геометрія даетъ много темъ, въ томъ числѣ для 3-го класса—темъ геодезическаго характера; напримѣръ, опредѣлить высоту дерева, ширину рѣки, разстояніе между двумя точками, изъ которыхъ одна недоступна, и проч. Много задачъ можетъ быть составлено на измѣреніе площадей и объемовъ. Въ связи съ практическими работами по физикѣ въ 4-мъ классѣ, она даетъ темы такого рода, какъ

[1]) На русскомъ языкѣ мнѣ извѣстенъ задачникъ г. Лубенца, содержаніе задачъ котораго взято изъ крестьянской жизни.

опредѣленіе вѣса и стоимости куска золота или серебра правильной геометрической формы. Между прочимъ, я лично присутствовалъ при рѣшеніи подобныхъ задачъ въ 4-мъ классѣ лицея въ Парижѣ, хотя тамъ этимъ упражненіямъ не предшествуетъ курсъ наглядной геометріи. Географія даетъ большое количество темъ уже въ младшихъ классахъ, а въ старшихъ можетъ дать еще больше. Который часъ въ Лондонѣ, когда въ нашемъ городѣ 12 часовъ? Съ какой быстротой мы двигаемся вслѣдствіе вращенія земли? Во сколько разъ быстрѣе двигается житель экватора въ сравненіи съ нами? На какой параллели (приблизительно) находится солнце сегодня? Вычислить приблизительно по картѣ площадь страны. Затѣмъ безконечно - разнообразны темы, доставляемыя статистикой, отъ самыхъ простыхъ до самыхъ сложныхъ, почему ими можно пользоваться на всѣхъ ступеняхъ обученія. Между прочимъ, именно для рѣшенія подобнаго рода задачъ слѣдовало бы приспособить ученіе о процентахъ въ 3-мъ классѣ, а не для рѣшенія задачъ на коммерческія сдѣлки. Для учениковъ этого класса еще совершенно неясны функціи капитала, и эти задачи представляютъ для нихъ затрудненіе главнымъ образомъ по существу, а не съ ихъ математической стороны. Въ наукѣ же чаще находятъ примѣненіе проценты, какъ способъ сравненія между собой одинаковыхъ долей сложнаго цѣлаго; съ этой точки зрѣнія было бы полезнѣе отложить коммерческіе проценты до старшихъ классовъ, а въ младшихъ пріучать учащихся къ пониманію процентовъ какъ дробей, приведенныхъ для удобства сравненія къ одному знаменателю, которымъ выбрано число 100, съ той же цѣлью удобства при помноженіи и дѣленіи. Полезно было бы употреблять не только проценты, но и промилли въ подходящихъ случаяхъ. Начиная съ 4 и особенно съ 5 класса громадное число темъ для задачъ можетъ и должна доставлять физика, а позже химія, космографія, физическая географія; въ старшихъ классахъ математика должна пользоваться всѣмъ запасомъ научныхъ свѣдѣній учащихся. Опытъ подобнаго задачника представляютъ сборники задачъ съ примѣненіемъ къ общественной жизни, геометріи, физики, астрономіи, мореплаваніи, техники и политической экономіи, соста-

вленные Schülke (изданія 1902 и 1906 г.). Широкое мѣсто должно быть отведено въ задачникѣ графическому методу. Съ этимъ пріемомъ изученія явленій можно начать знакомить учащихся уже съ I класса, пріучая ихъ наносить на миллиметровую бумагу результаты ихъ ежедневныхъ наблюденій температуры воздуха, а позже и барометрическаго давленія. Въ старшихъ классахъ слѣдуетъ примѣнять графическій методъ для выраженія результатовъ опытовъ, производимыхъ учащимися на практическихъ занятіяхъ по физикѣ. Полезно также пріучать учащихся къ составленію графикъ по коммерческой географіи или, что то же, по статистикѣ. Такимъ образомъ, всѣ науки, изучаемыя въ школѣ, будутъ приносить свою долю помощи для усвоенія математическихъ понятій.

Задачи, подобныя тѣмъ, содержаніе которыхъ набросано выше, должны имѣть большое значеніе для умственнаго развитія учащихся. Такія задачи все время удерживаютъ воспитанника на почвѣ реальности, потому что онѣ рѣшаются не только какъ математическая задача, вродѣ численныхъ или буквенныхъ примѣровъ, но и какъ вопросъ, имѣющій реальное значеніе. Поэтому на такихъ задачахъ учащимся приходится оцѣнивать реальную возможность полученнаго ими результата Многочисленными примѣрами эти задачи показываютъ учащимуся связь математики съ реальной жизнью и наукой; учащемуся постепенно выясняется значеніе математики, какъ всеобщей истолковательницы явленій, какъ того орудія, при помощи котораго строятся научныя теоріи и двигается впередъ матеріальная культура. Постепенно учащійся проникается убѣжденіемъ, что всякая вещь въ мірѣ имѣетъ кромѣ качественной и количественную сторону, и привыкаетъ смотрѣть на явленія міра съ точки зрѣнія количественныхъ отношеній, въ этомъ и состоитъ математическое развитіе, а не только въ технической ловкости, т. е. въ умѣніи производить математическія передѣлки, не понимая того, какія явленія реальнаго міра символизируютъ полученный результатъ. Сознаніе такого всеобщаго значенія математики дѣйствительно вызоветъ въ учащихся уваженіе къ этой «царицѣ наукъ», тогда какъ нелѣпыя задачи нашихъ задачниковъ, вродѣ тѣхъ, гдѣ хозяйка распла-

чивается съ кухаркой вмѣсто денегъ шелкомъ и бархатомъ, какъ будто не имѣютъ другой цѣли, какъ доказать учащимся, что математика — пустая и ни къ чему полезному не пригодная наука.

Однако, составленіе подобнаго задачника дѣло не легкое. Передъ составителями распространенныхъ теперь задачниковъ возникла въ сущности одна трудность—разработка математическаго матеріала, приспособленіе его къ теоретическому курсу о содержаніи же задачъ составители ихъ мало заботились. Поэтому и дожили до нашихъ дней типы задачъ чуть не изъ сборника Алкуина, и всѣ эти задачи на курьеровъ и на бассейны. Но для составителя задачника въ разсматриваемомъ мною духѣ присоединяются къ этой новыя трудности; во-первыхъ, приспособленіе данныхъ реальнаго міра и данныхъ науки для математической разработки, соотвѣтственно теоретическому курсу и пониманію дѣтей; во-вторыхъ, выборка подходящихъ для этой разработки данныхъ изо всей безгранично-разнообразной области науки и человѣческихъ отношеній. Поэтому, мнѣ кажется, что составленіе такого задачника должно было бы быть коллективнымъ дѣломъ; съ одной стороны въ немъ должны принять участіе спеціалисты въ разныхъ областяхъ знанія, доставленіемъ соотвѣтствующаго содержанія и численныхъ данныхъ, оцѣнивая при этомъ его значеніе съ точки зрѣнія своей науки; съ другой стороны математики разрабатывали и приспособляли бы этотъ матеріалъ съ математической стороны.

Позволю себѣ поставить на обсужденіе Съѣзда слѣдующіе вопросы:

1) Желательно ли составленіе подобнаго задачника; 2) желательно ли его составленіе коллективными силами; 3) если желательно, то въ какомъ видѣ могло бы оно осуществиться».

Тезисы.

1. Сущность науки составляетъ общее и отвлеченное, въ противоположность единичному и конкретному. Поэтому наука дѣлается тѣмъ болѣе научной, чѣмъ болѣе она удаляется отъ конкретныхъ фактовъ.

2. Однако научныя отвлеченія и обобщенія основываются исключительно на конкретныхъ фактахъ, а не создаются самостоятельной и независимой дѣятельностью ума.

3. Поэтому для правильнаго развитія науки необходима непрерывная провѣрка ея обобщеній на ихъ согласіе съ дѣйствительностью.

4. Съ другой стороны, если наука имѣетъ не самодовлѣющее значеніе, а служитъ для регулированія и направленія нашего поведенія, то это ея значеніе обезпечивается точно также непрерывнымъ установленіемъ связи науки съ конкретными и жизненными фактами.

5. Съ педагогической точки зрѣнія это означаетъ, что наука должна изучаться въ школѣ въ ея отношеніяхъ къ жизненнымъ и научнымъ фактамъ. Нужно научить въ школѣ примѣнять общія положенія къ единичнымъ конкретнымъ случаямъ.

6. Внѣ отношенія къ означеннымъ фактамъ, изученіе науки въ школѣ вырождается въ схоластицизмъ, ведетъ къ потерѣ учениками чутья реальнаго и вырабатываетъ изъ нихъ пустыхъ фразеровъ, непригодныхъ для жизни.

7. Въ математикѣ жизненное и реальное направленіе преподаванія достигается примѣненіемъ ея ко всей области знаній, сообщаемыхъ ученику (физика, химія, естествознаніе, географія).

8. Для достиженія этой же цѣли, содержаніе математическихъ задачъ должно имѣть отношеніе къ жизни и къ тому, что изучается въ школѣ, а также къ кругу интересовъ ученика, соотвѣтственно его возрасту; не должны допускаться задачи, содержаніе которыхъ искусственно, выдуманно, нелѣпо и стоитъ въ противорѣчіи съ жизненными фактами. Оно должно быть таково, чтобы на дѣлѣ показать безконечную приложимость математики къ изученію всѣхъ явленій міра.

9. Составленіе такого задачника, матеріалъ котораго взятъ изъ безконечно-разнообразной области науки и человѣческихъ отношеній, представляетъ настоятельную потребность.

10. Но его составленіе не подъ силу одному лицу,—оно должно быть коллективнымъ дѣломъ многихъ спеціалистовъ.

VIII. Обоснованіе ариѳметическихъ дѣйствій.

Докладъ В. А. Соколова (Майкопъ, Кубанской обл.).

«1. Положимъ, буква A означаетъ предметъ, опред ленно отличимый отъ другихъ предметовъ, C—собраніе предметовъ A или одно A, притомъ обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ: если отъ C отдѣлять п слѣдовательно по одному A, то можно дойти до уничтоженія

Я буду говорить, что одно C находится съ другимъ в связи c, если элементы (отдѣльные A) одного C связаны в нашей мысли съ элементами другого C такъ, что каждое одного связано съ однимъ и только съ однимъ A другого обратно.

2. Всѣ C, въ которыхъ опредѣленно указан элементы A, можно раздѣлить на виды по сл дующему признаку (признакъ r): если межд однимъ С и другимъ возможна связь c, то он одного вида, если—нѣтъ, то разныхъ.

Дѣйствительно, легко доказать, 1) что сужденіе о том принадлежитъ ли одно C къ одному виду съ другимъ не з виситъ отъ порядка, въ которомъ мы перебираемъ элементы при установленіи связи c, 2) что отношеніе одного C къ др гому, опредѣляемое возможностью между ними связи c, транз тивно. Кромѣ того, для каждаго C мы или найдемъ въ р альномъ мірѣ или можемъ создать хотя бы въ нашей мыс другое C, съ которымъ данное можетъ быть связа связью c.

Положимъ, M одно изъ C. Всѣ другія C, которыя м гутъ быть связаны съ M связью c составляютъ одинъ вид потому что они всѣ могутъ быть связаны этой связью дру съ другомъ. Если M есть новое c, принадлежащее къ одно виду съ M, то M, какъ и M, даетъ основаніе новому виду и т. д.

Такимъ образомъ, каждое C будетъ въ эт системѣ принадлежать какому-нибудь виду. Он будетъ принадлежать только къ одному, потому чт

при допущеніи противоположнаго, мы пришли бы къ заключенію, что C одного вида могутъ быть связаны съ C другого связью c, т. е., что два вида сливаются въ одинъ.

3. Виды могутъ быть опредѣлены по ихъ представителямъ, хорошо намъ извѣстнымъ и удобнымъ для изслѣдованія. Такихъ представителей всѣхъ возможныхъ видовъ даетъ намъ рядъ словъ и знаковъ повторяющихся всегда въ одномъ и томъ же порядкѣ: 1, 2, 3, 4 . . . .

$$\begin{matrix} a & b & d \\ | & | & | \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

написанное здѣсь собраніе буквъ a, b, c одного вида съ собраніемъ знаковъ 1, 2, 3.

Знаки 1, 2, 3... называются числовыми символами. Послѣднее изъ нихъ всегда опредѣляетъ все собраніе предшествующихъ, а, слѣдовательно, опредѣляетъ и его видъ по признаку r (см. 2).

4. Числовые символы опредѣляютъ собой видъ C въ указанной выше системѣ; нѣкоторые изъ уславливаются считать именами этихъ видовъ, но я не буду употреблять слова одинъ, два, и т. д. какъ имена видовъ.

Въ моемъ обозначеніи имена видовъ будутъ одно A, два A и т. д. (значеніе A см. 1).

Если всѣ A, входящія въ составъ даннаго C (напр. $3A$.), кромѣ свойства соозначаемаго именемъ A (опредѣленная отличимость одного отъ другого) обладаютъ еще какимъ-нибудь общимъ свойствомъ, то по этому общему свойству имъ можетъ быть дано общее имя, это имя можетъ быть подставлено въ сложное имъ собраніе $3A$ вмѣсто буквы A, напр., собраніе a b и d, гдѣ элементы a, b и d будутъ носить имя трибуны.

Числовой символъ, поставленный передъ именемъ предмета, опредѣляетъ собой операцію, которая, будучи приложена къ названному за нимъ предмету, даетъ собраніе, опредѣляемое всѣмъ сложнымъ именемъ. Въ этомъ числовой символъ

совершенно подобенъ знаку f въ обозначеніи функціи $f(t)$. Операцію эту я буду называть умноженіемъ предмета A на числовой символъ.

Умноженіе производится, какъ показано на планѣ справа. Въ разныхъ частныхъ случаяхъ это умноженіе называется отсчитываніемъ, отмѣриваніемъ...

1	2	3
|	|	|
буква	буква	буква

Предметъ, имя котораго стоитъ въ названіи C послѣ числового символа, я буду называть предметной единицей.

6. Дѣйствія надъ чистыми числовыми символами основываются на слѣдующемъ принципѣ.

Въ случаяхъ сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія, числовой символъ результата опредѣляется числовыми символами данныхъ и не зависитъ отъ единицы.

Въ этомъ докладѣ докажу его только для умноженія, но его можно доказать для всѣхъ дѣйствій и надъ всякими числовыми символами.

7. Положимъ C есть nB, и B есть mE. Здѣсь m и n числовые символы.

Имена mE и B означаютъ здѣсь одни и тѣ же предметы, эту равносильность именъ B и mE я обозначу такъ: $B \underset{u}{=} mE$

При этомъ условіи $nB \underset{u}{=} n(mE)$.

Докажемъ, что $n(mE)$ есть нѣкоторое C не только по отношенію къ элементу mE, но и по отношенію къ элементу E.

$n(mE)$ есть C, видъ котораго по отношенію къ элементу mE опредѣляется (r) символомъ n. Поэтому мы можемъ связать всѣ mE, входящіе въ $n(mE)$, связью c съ рядомъ знаковъ

	1,	2,	3, ... ,	n
знаковъ	|	|	|	|
	mE	mE	mE. . .	mE.

По свойству C, мы, отдѣляя по одному E, можемъ уничтожить mE, связанное съ любымъ изъ знаковъ $1, 2, \ldots, n$. Слѣдовательно, отдѣляя по одному E, мы можемъ уничтожить одно за однимъ послѣдовательные mE въ $n(mE)$, а въ

такомъ случаѣ, по свойству C мы можемъ дойти до уничтоженія $n(mE)$. Итакъ, отдѣляя по одному E, мы можемъ дойти до уничтоженія $n(mE)$, слѣдовательно, $n(mE)$ есть нѣкоторое C изъ E. Положимъ, видъ его опредѣлится числовымъ символомъ p, т. е. $n(mE) \overline{\overline{u}}\, pE$.

Докажемъ, что p не зависитъ отъ E и вполнѣ опредѣлятся символами m и n. Опредѣлить p значитъ опредѣлить видъ даннаго C въ указанной выше системѣ. Опредѣлимъ его по представителю, который составимъ такъ:

	1	2	3	m
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	1	1	1	1

Докажемъ, что собраніе черточекъ въ этой таблицѣ одного вида (по признаку r) съ $n(mE)$, каково бы ни было E.

Собраніе черточекъ есть собраніе n рядовъ, слѣдовательно, принимая за элементы рядъ и mE, мы можемъ установить такую связь (c), что каждый рядъ будетъ связанъ съ однимъ mE и только съ однимъ, и обратно. Соединимъ всѣ черточки каждаго ряда съ E соотвѣтственныхъ собраній mE, связью c, тогда собраніе $n(mE)$, разсматриваемое какъ собраніе элементовъ E, будетъ связано связью c съ черточками таблицы. Слѣдовательно, таблица, какъ собраніе черточекъ одного вида $n(mE)$ или pE, и видъ pE, а съ ними и числовой символъ p опредѣлятся по приведенной таблицѣ, которая вполнѣ опредѣляется числовыми символами m и n и не зависитъ отъ p. Итакъ p вполнѣ опредѣляется числовыми символами m и n. Назовемъ p произведеніемъ символа m на символъ n, операцію, въ которой находится это произведеніе, умноженіемъ, и будемъ обозначать произведеніе m на n сложнымъ символомъ $n.\ m$, т. е. примемъ, что $p = n.m$.

На основаніи этого условія

$$(a) \qquad n(mE) \overline{\overline{u}}\, (n.m)E$$

Въ послѣднемъ равенствѣ (по тождеству означаемыхъ классовъ) E означаетъ какой угодно предметъ изъ класса

A (см. 1). Этотъ предметъ самъ можетъ быть собраніемъ и опредѣляться при помощи числового символа и единицы.

Равенство α даетъ основаніе для вывода свойства сочетательности при умноженіи числовыхъ символовъ. Оно же выражаетъ и условіе приложимости числовыхъ символовъ и дѣйствій надъ ними къ реальнымъ предметамъ».

Пренія по докладу В. А. Соколова.

На предложеніе предсѣдателя собранія высказаться по поводу заслушаннаго доклада никто изъ присутствовавшихъ не отозвался.

Предсѣдатель Собранія, *Б. Б. Піотровскій*, считаетъ необходимымъ отмѣтить слѣдующее:

„Докладчикомъ затронутъ весьма интересный и трудный, какъ въ научномъ, такъ и въ педагогическомъ отношеніяхъ, вопросъ объ основныхъ понятіяхъ ариѳметики.

Устанавливая понятіе о числѣ, докладчикъ, видимо, имѣлъ ввиду исходить при этомъ изъ понятій: объ ансамблѣ (комплексѣ), объ однозначномъ соотвѣтствіи элементовъ ансамбля и объ ансамбляхъ одинаковой мощности.

Такая система построенія основъ ариѳметики проведена, между прочимъ, въ „Энциклопедіи элементарной математики" Вебера и Вельштейна.

Не входя въ подробный разборъ настоящаго доклада, приходится, однако, отмѣтить, что какъ указанныя выше понятія, такъ и предложенное докладчикомъ обоснованіе ариѳметическихъ дѣйствій, основанное на этихъ понятіяхъ, изложены недостаточно ясно и методически не разработаны, и поэтому докладъ В. А. Соколова врядъ ли что-нибудь вноситъ въ рѣшеніе вопроса объ обоснованіи ариѳметическихъ дѣйствій съ точки зрѣнія интересовъ преподаванія".

IX. Сообщеніе А. В. Годнева (Симбирскъ).

Основныя положенія, которыми руководствовался А. В. Годневъ при составленіи своего труда по геометріи, и его особенности сводятся къ слѣдующему.

Для упрощеннаго построенія геометріи и расширенія ея содержанія, слѣдуетъ:

А) разсматривать движеніе геометрическихъ элементовъ, коимъ образуются геометрическія фигуры, не какъ неизбѣжное зло при построеніи геометрической науки, а какъ вспомогательное орудіе построенія, логически вполнѣ законное и въ вышей степени важное.

В) для полученія сплошного, а не отрывистаго построенія геометрическихъ фигуръ ввести аксіомы: какъ непрерывности фигуръ, образуемыхъ движеніемъ, непрерывныхъ геометрическихъ элементовъ, такъ и соотвѣтствующей непрерывности измѣряющихъ эти фигуры чиселъ.

Переходя затѣмъ къ самому построенію геометріи въ частности, получаемъ, не вводя новыхъ постулатовъ, выводы:

1) что къ каждой точкѣ на безконечныхъ прямыхъ линіяхъ прилежатъ равныя (по совмѣстимости при наложеніи) безконечныя прямыя;

2) что къ каждой точкѣ, взятой на какихъ угодно безконечныхъ плоскостяхъ, прилежатъ равныя безконечныя плоскости (по совмѣстимости при наложеніи);

3) новое опредѣленіе линейнаго угла, какъ отклоненіе другъ отъ друга пересѣкающихся прямыхъ линій при точкѣ ихъ пересѣченія;

4) понятіе о полномъ линейномъ углѣ. Равенство полныхъ линейныхъ угловъ и его важныя слѣдствія;

5) взглядъ на кривыя линіи, какъ на линіи непрерывно-ломанныя. Важность обобщенія ломанныхъ и кривыхъ линій.

6) доказательство равенства большей части геометрическихъ фигуръ опирается на единичность способа ихъ построенія изъ даннаго числа одинаковыхъ ихъ элементовъ;

7) новый постулатъ въ теоріи параллельныхъ линій, опредѣляющій ихъ эквидистантность; неприводимыя нынѣ слѣдствія этого постулата.

8) идеальное понятіе о минимальной, ближайшей по величинѣ къ нулю, части прямой линіи и соизмѣримость всѣхъ отрѣзковъ прямыхъ линій при дѣленіи на эту часть;

9) построеніе всѣхъ симметрическихъ фигуръ;

10) новая теорія подобія плоскихъ геометрическихъ фигуръ;

11) доказательство принципа Кавальери по отношенію къ плоскимъ геометрическимъ фигурамъ.

—

Пренія по сообщенію А. В. Годнева.

В. Я. Гебель (Москва) обратилъ вниманіе Собранія на то, что трудъ г. Годнева представляетъ собой опытъ составленія учебника въ соотвѣтствіи съ новымъ направленіемъ преподаванія геометріи: авторъ вводитъ, напримѣръ, элементы движенія понятіе о гомотетіи—съ этой точки зрѣнія трудъ г. Годнева и его сообщеніе представляютъ интересъ.

Б. Б. Піотровскій (Спб.). „Въ трудѣ г. Годнева есть такіе пункты, относительно которыхъ необходимо высказаться въ настоящемъ собраніи. Я имѣю ввиду опредѣленіе кривой, какъ линіи «непрерывно ломаной» и понятіе «о минимальной, ближайшей по величинѣ къ нулю, части прямой»".

„Опредѣленіемъ кривой, какъ непрерывно-ломаной, докладчикъ предлагаетъ избѣжать понятія о предѣлѣ и этимъ упростить изложеніе нѣкоторыхъ вопросовъ курса геометріи—въ томъ или иномъ видѣ такія понятія давно дѣлались, ихъ логическая несостоятельность установлена".

„Что же касается до понятія о минимальной, ближайшей къ нулю, части прямой, то это понятіе вноситъ какой-то метафизическій характеръ въ математическія понятія. Я полагаю, что слѣдуетъ рѣшительно высказаться о непріемлемости предложеній докладчика въ указанныхъ пунктахъ".

М. Е. Волокобинскій (Рига), вполнѣ присоединяясь къ словамъ предсѣдателя, указываетъ, что ломаніе прямой линіи, неизвѣстно по какому способу, можетъ и не привести къ окружности. Необходимо доказать, что такая кривая, полученная изъ непрерывно-ломаной линіи, будетъ замкнута и будетъ непремѣнно окружность. Въ курсахъ геометріи точка зрѣнія автора проводилась и мысль признана несостоятельной. Книга г. Годнева является шагомъ назадъ.

Третье засѣданіе

2 января 1912 г. 8 ч. веч.

Предсѣдательствовалъ М. Г. Попруженко.

Пренія по докладу В. Р. Мрочека.

(См. стр. 68).

Д. Л. Волковскій (Москва) сдѣлалъ слѣдующія возраженія: 1) классификація направленій въ методикахъ ариѳметики, указанная г. Мрочекомъ, несостоятельна, такъ какъ эта классификація невѣрна по существу и не характерна для методическихъ взглядовъ нѣкоторыхъ методистовъ; такъ, напр., между методическими взглядами Евтушевскаго и Гольденберга—громаднѣйшая разница, а г. Мрочекъ отнесъ ихъ къ одному направленію.

2) Характеристика методическихъ взглядовъ Гольденберга невѣрна. Г. Мрочекъ находитъ «глубокій разладъ между Методикой ариѳметики Гольденберга и его же Бесѣдами по счисленію» .Между тѣмъ, здѣсь нѣтъ никакого разлада, а есть путь эволюціи во взглядахъ почтеннаго методиста, а такой путь есть естественный путь въ развитіи человѣка.

3) Утвержденіе, что методики гг. Арженикова, Беллюстина «перекроены изъ другихъ методикъ» невѣрно, такъ какъ въ этихъ методикахъ есть нѣкоторыя особенности, присущія только этимъ методикамъ, и вообще эти работы являются почтенными въ русской методической литературѣ.

4) Обзоръ русскихъ и иностранныхъ методикъ ариѳметики не полонъ и не характеренъ. Такъ, напр., не были указаны такія солидныя работы, какъ методики гг. Бобровникова и Гурьева.

Кромѣ того, г. Волковскій указалъ на особенности методическихъ взглядовъ гг. Галанина, Герлаха, Лая и Штеклина и затѣмъ высказалъ слѣдующія положенія, примыкающія къ вопросу о методикѣ ариѳметики.

1) Слѣдуетъ осторожно и критически относиться къ дан-

нымъ экспериментальной психологіи и дидактики, ибо въ нихъ не мало спорнаго по вопросу, касающемуся ариѳметики.

2) Не слѣдуетъ увлекаться рисованіемъ на урокахъ ариѳметики, какъ это теперь нерѣдко дѣлается въ Россіи съ легкой руки американцевъ.

3) Признавая полезность и необходимость жизненныхъ практическихъ задачъ, а также задачъ, содержаніе которыхъ черпается изъ другихъ учебныхъ предметовъ, какъ, напр., географія, исторія, естественныя науки, приходится предостеречь отъ увлеченія этимъ.

4) Обобщая направленія въ области иностранныхъ методикъ ариѳметики, г. Волковскій замѣтилъ, что изъ иностранцевъ больше всѣхъ разрабатываютъ методику ариѳметики нѣмцы и американцы, но работы нѣмцевъ слишкомъ систематичны и нерѣдко педантичны, а работы американцевъ слишкомъ практичны.

10) Русскіе методисты должны пойти среднимъ путемъ: должны планомѣрно и цѣлесообразно соединить систематичность съ практичностью, теоретичность съ жизненностью, избѣгая односторонностей, ибо какъ излишняя теоретичность, такъ и излишняя практичность въ равной мѣрѣ не совмѣстимы со здравымъ обученіемъ вообще и ариѳметикой въ частности.

Въ заключеніе высказанныхъ имъ замѣчаній, г. Волковскій призываетъ русскихъ методистовъ къ совмѣстной и дружной работѣ въ этомъ направленіи.

В. Р. Мрочекъ (Спб.). „Прежде, чѣмъ возражать моему оппоненту по существу, я долженъ напомнить, что въ докладѣ я ограничилъ разсмотрѣніе методической литературы по ариѳметикѣ только книгами, изданными на русскомъ языкѣ. Поэтому ясно, что я не могъ вдаваться въ обзоръ иностранной методической литературы".

„Перехожу къ отдѣльнымъ пунктамъ. Г. Волковскій утверждаетъ, что предположенная мною классификація несостоятельна, невѣрна и не характерна; для доказательства онъ ссылается на Евтушевскаго и Гольденберга, которыхъ я отнесъ къ одному направленію, тогда какъ между ихъ взглядами будто-бы громаднѣйшая разница. Очень жаль, что оппонентъ не указалъ деталей этой разницы. Ни для кого не секретъ, что споръ между Евтушевскимъ и Гольденбергомъ велся изъ за вопроса о числѣ; ни тотъ, ни другой не являлись сколько нибудь самостоятельными творцами, а лишь болѣе или менѣе умѣло добавляли крупицы своего опыта къ такимъ же крупицамъ предшественниковъ и современниковъ. И при томъ, развѣ по существу методъ доказательства у Евтушевскаго и Гольденберга различенъ?

Оба опираются на личный опытъ, оба стараются этотъ эмпиризмъ возвести въ догму. Развѣ кто-либо изъ нихъ — или изъ всѣхъ остальныхъ, указанныхъ мною эмпириковъ — хотя бы пытался призвать на помощь теорію познанія, психологію, исторію математики? Развѣ они могли—при всемъ желаніи—сдѣлать это, если научная ариѳметика и научная методика зародилась послѣ нихъ? И развѣ при такомъ заколдованномъ кругѣ всѣ новыя „Методики“ не будутъ неизбѣжно перекраиваться изъ старыхъ? Детали у каждаго на 5%—10% могутъ расходиться; да развѣ въ въ этомъ дѣло? Духъ книги, узость и замкнутость педагогическаго и математическаго міросозерцанія—вотъ что вѣетъ со страницъ всѣхъ этихъ «Методикъ» и это заставляетъ отнести ихъ къ одному направленію“.

„Я согласенъ, что не указалъ старыхъ методикъ (начала XIX ст.); но вѣдь я читалъ докладъ не по исторіи преподаванія ариѳметики!“

„Я не буду вдаваться въ филологію и выяснять сущность и различіе терминовъ эмпирическій и экспериментальный. Г. Волковскій, вѣроятно, знаетъ, что наука была эмпирической, затѣмъ стала догматической, а потомъ — экспериментальной. Вотъ такая же точно эволюція происходитъ и съ педагогикой. Во всякомъ случаѣ, смѣшивать эти два направленія нѣтъ никакихъ основаній“.

„Затѣмъ г. Волковскій перешелъ къ установленію собственныхъ взглядовъ на методику ариѳметики. Въ первую очередь онъ отнесся критически къ Лаю и вообще къ экспериментально-педагогическому направленію. Я былъ изумленъ его словами: вѣдь онъ такъ недавно рекомендовалъ русской публикѣ книгу Лая и даже редактировалъ ея переводъ? Правда, что съ тѣхъ поръ прошло 2 года и теперь подъ его же редакціей выходитъ методика Штеклина. Но развѣ Штеклинъ можетъ быть принятъ въ серьезъ и противопоставленъ Лаю? На стр. 10—13 онъ осмѣиваетъ и критикуетъ «изобрѣтателя квадратныхъ числовыхъ фигуръ» (т. е. Лая), а, слѣдовательно, и самыя фигуры, но дальше (стр. 152, 154—156 и др.) онъ не только заявляетъ, «что и горизонтальный, и вертикальный рядъ, составленный изъ 10 одинаковыхъ точекъ (свѣтлыхъ или темныхъ), страдаетъ полнымъ отсутствіемъ наглядности», но и указываетъ, какъ должны ученики рисовать числовыя фигуры на грифельныхъ доскахъ, совѣтуетъ дать имъ въ руки индивидуальное наглядное пособіе въ видѣ числовыхъ фигуръ, «составленныхъ изъ точекъ», и, наконецъ, прямо утверждаетъ, «что тотъ, кто прибѣгаетъ къ счету, никогда не научится порядочно вычислять». Справедливо-ли послѣ этого противополагать

подобнаго методиста Лаю? И вообще—можно ли серьезно утверждать, что опыты Вальземана, Книллинга и др. противорѣчатъ даннымъ Лая?"

„Но г. Волковскій этимъ не ограничился. Онъ заявилъ, что въ психологіи есть 2 школы, что въ Петербургѣ есть Нечаевъ, но зато въ Москвѣ есть Челпановъ. Я приведу только одну справку. На II Всероссійскомъ Съѣздѣ по Педагогической Психологіи (1909 г.), а затѣмъ въ «Вопросахъ Философіи и Психологіи» Челпановъ утверждалъ, что психологія одна и никакой экспериментальной психологіи нѣтъ. Но въ то время, какъ въ Петербургѣ съ каѳедры Челпановъ громилъ экспериментъ, какъ хламъ, въ Москвѣ, въ магазинѣ Карбасникова, продавался его литографированный «Курсъ экспериментальной психологіи», читанный студентамъ Московскаго Университета..."

„Въ заключеніе г. Волковскій рекомендовалъ сугубую осторожность во взглядахъ, поэтому—совѣтовалъ не увлекаться рисованіемъ, жизненными задачами, излишней практичностью и т. п. Все это—человѣчество слышало сотни разъ; но какъ все это скучно! Напротивъ—не надо бояться новаго, широкаго и разносторонняго! Отбросимъ старые рецепты нашихъ «Методикъ», сблизимъ учителя съ ученикомъ, а ихъ обоихъ—съ жизнью, дадимъ имъ возможность принаравливаться къ условіямъ мѣста, времени, среды. Довольно съ насъ старыхъ задачниковъ для Сибири и Москвы, Архангельска и Кавказа. Нужны районные задачники, тѣсно связанные съ кругомъ представленій учащихся, съ ихъ индивидуальнымъ и біологическимъ интересами. Намъ нужна не совмѣстная осторожная нивеллировка методистовъ, а творческая, свободная дѣятельность учителя".

М. Г. Попруженко (Спб.). „Резюмируя пренія по поводу докладовъ о методикахъ ариѳметики, я съ сожалѣніемъ долженъ отмѣтить излишнюю страстность, внесенную въ обсужденіе, и неполную обоснованность нѣкоторыхъ выводовъ".

„Такъ, напримѣръ, классификація методикъ, сдѣланная г. Мрочскомъ, вызываетъ разнообразныя сомнѣнія по поводу психологическихъ началъ, положенныхъ въ основу ея, и во всякомъ случаѣ изъ нея не вытекаетъ заключеніе, что новѣйшія методики «научнѣе», являются наилучшими, заслоняющими собой всѣ предшествующія. И въ прежнихъ методикахъ есть глубокія психологическія наблюденія опытныхъ педагоговъ и ищущій преподаватель можетъ найти въ нихъ очень цѣнныя для него указанія".

Пренія по докладу Н. Н. Володкевича.

(См. стр. 94).

Л. А. Сельскій (Варшава) дѣлаетъ сообщеніе о своей попыткѣ составить задачникъ по ариѳметикѣ примѣнительно къ жизни. Всѣ задачи въ задачникѣ составлены имъ для его уроковъ въ гимназіи и всѣ рѣшались въ классѣ. Во всѣхъ задачахъ операціи производятся не надъ числами, не имѣющими никакого жизненнаго смысла, а надъ вполнѣ опредѣленными величинами, взятыми изъ географіи, исторіи, естественныхъ наукъ и т. п. При этомъ всѣ числа вполнѣ отвѣчаютъ дѣйствительности, но въ нѣкоторыхъ задачахъ числа округлены. Во многихъ мѣстахъ дается понятіе о среднихъ величинахъ и о нѣкоторыхъ приближенныхъ дѣйствіяхъ. Матеріалъ для задачъ взятъ, по большей части, изъ данныхъ для Россіи, только иногда для сравненія берутся данные другихъ государствъ. Такъ, напр., для сложенія берутся число жителей въ городахъ, губерніяхъ, ихъ пространства, разстоянія между городами, длины рѣкъ съ притоками и т. п. Въ задачахъ съ историческимъ элементомъ ученики оперируютъ надъ промежутками времени между моментами различныхъ событій, находятъ моментъ нѣкотораго событія, когда извѣстенъ моментъ другого событія и промежутокъ времени между этими моментами. Во многія задачи включены свѣдѣнія изъ статистики Россіи и другихъ государствъ. Есть задачи, гдѣ фигурируетъ бюджетъ. Задачи о курьерахъ замѣнены соотвѣтственными задачами изъ жизни: встрѣча пароходовъ, поѣздовъ. Въ задачахъ на бассейны можетъ быть взятъ для примѣра Нарзанъ. Пользуясь задачами на приходъ и расходъ, капиталъ и долгъ, время до и послѣ событія, температура и т. д., можно и въ 1-мъ классѣ дать понятіе объ отрицательныхъ числахъ.

Д. Л. Волковскій (Москва). „Вопросъ о содержаніи задачъ очень важенъ и не новъ. Нельзя увлекаться этимъ. Необходимо всегда при рѣшеніи задачи выяснить ея смыслъ, а это можно дѣлать только послѣ того, какъ предметъ задачи ужъ извѣстенъ изъ пройденнаго курса (по другимъ предметамъ), но въ 1 классѣ многіе предметы, свѣдѣніями изъ которыхъ г. Сельскій предлагаетъ пользоваться, не проходятся и поэтому придется на урокахъ ариѳметики проходить и исторію, и географію, и другіе предметы. Это можетъ отвлечь вниманіе учениковъ отъ основной цѣли урока“.

В. М. Куперштейнъ (Елисаветградъ) указываетъ, что нельзя въ первомъ классѣ рѣшать, напр., такія задачи, гдѣ встрѣчается

бюджетъ Россіи. Это приведетъ къ необходимости обширныхъ объясненій въ этой области и не всегда это будетъ понятно ученикамъ. Затѣмъ необходимо различать задачники для дѣтей городскихъ и для дѣтей деревенскихъ. У нихъ совершенно разный кругъ представленій, и поэтому задачники однихъ не годятся для другихъ. Всѣ наши задачники для начальнаго обученія составлены для сельской школы, а потому являются непригодными для городскихъ дѣтей.

И. И. Володкевичъ (Кіевъ) предлагаетъ Съѣзду высказаться о желательности составленія задачника, отвѣчающаго жизненнымъ условіямъ, и указываетъ на способъ коллективнаго составленія такого задачника. Каждый преподаватель могъ бы прислать куда-либо въ опредѣленное мѣсто составленныя имъ задачи и по накопленіи матеріала могла бы быть произведена коллективная же разработка этого матеріала.

М. Г. Попруженко (Спб.) высказываетъ опасеніе, какъ бы требованія жизненности и практичности содержанія задачъ не отодвинули на задній планъ тѣ требованія, которымъ долженъ удовлетворять задачникъ, имѣя въ виду главную цѣль — обученіе ариометикѣ, какъ бы составители задачниковъ не стали бы главнымъ образомъ заботиться о томъ, чтобы заполнить свои сборники возможно болѣе разнообразными свѣдѣніями изъ исторіи, географіи, статистики и т. п.

Что касается задачника г. Сельскаго, то М. Г. Попруженко указываетъ на полную непрактичность нѣкоторыхъ изъ помѣщенныхъ въ этомъ сборникѣ задачъ.

Предсѣдатель секціи, М. Г. Попруженко, докладываетъ, что, согласно выраженному въ засѣданіи 28-го Января желанію членовъ секціи Организаціонный Комитетъ включаетъ въ число резолюцій и резолюцію о желательности изданія математической хрестоматіи.

2-я секція.

Программы и экзамены.

Во второй секціи обсуждались вопросы *о программахъ математики въ средней школѣ и объ экзаменахъ.* Докладамъ перваго рода было посвящено 1-ое засѣданіе, происходившее 27 декабря, докладамъ второго рода—2-ое засѣданіе, происходившее 30 декабря.

Въ *первомъ засѣданіи* были заслушаны доклады:

1) *П. А. Тамамшевой* (Спб.). «О реформѣ преподаванія математики. Общія положенія и программы».

2) *Г. П. Кузнецова* (Новочеркасскъ). «О желательности временныхъ измѣненій въ преподаваніи алгебры въ женскихъ учебныхъ заведеніяхъ».

Во *второмъ засѣданіи* были заслушаны доклады:

3) проф. *П. А. Некрасова* (Спб.). «О результатахъ преподаванія анализа безконечно-малыхъ и аналитической геометріи въ реальныхъ училищахъ».

4) *Б. А. Марковича* (Спб.). «Объ экзаменахъ по математикѣ въ средней школѣ».

За каждымъ докладомъ сейчасъ же слѣдовали пренія, отличавшіяся сравнительною оживленностью; особенно много обсуждался докладъ Г. П. Кузнецова.

Засѣданія второй секціи происходили подъ предсѣдательствомъ проф. Михайловской Артиллерійской Академіи ген.-маіора С. Г. Петровича при секретарѣ П. А. Самохваловѣ.

I. О реформѣ преподаванія математики. Общія положенія и программы. Содержаніе курса математики за первыя шесть лѣтъ обученія.

Докладъ П. А. Тамамшевой (Спб.).

«Абсолютное незнаніе математики, полное отсутствіе какихъ бы то ни было математическихъ понятій и представленій, незнакомство съ основными методами математическаго изслѣдованія, пренебрежительное, но вмѣстѣ съ тѣмъ не лишенное страха отношеніе къ математикѣ, — все это является у насъ обычнымъ и даже считается вполнѣ естественнымъ. Не есть ли это неопровержимое доказательство полной непригодности принятыхъ у насъ методовъ преподаванія и нецѣлесообразности выбора и распредѣленія матеріала, составляющаго курсъ математики нашихъ школъ? Въ оправданіе говорятъ, что математика далека отъ жизни. Дѣйствительно, далеки отъ жизни математическія теоріи, научныя разработки математическихъ вопросовъ, но развѣ далеки отъ жизни математическія понятія и представленія? Развѣ намъ не приходится постоянно сталкиваться съ понятіями о рядѣ, безконечности, непрерывности и функціональной зависимости, а также съ пространственными и временными соотношеніями; развѣ внѣшній міръ не даетъ безконечнаго многообразія геометрическихъ формъ, развѣ мы не сталкиваемся со всякаго рода измѣреніями, взвѣшиваніями, съ опредѣленіями объемовъ, площадей, съ различными видами движенія, съ примѣненіями математическихъ методовъ къ изученію явленій природы, съ географическими и астрономическими понятіями о формѣ земли, небесныхъ тѣлъ, ихъ орбитѣ; развѣ не опредѣляемъ положенія точки, предмета при помощи координатъ, не пользуемся графиками и т. д. и т. д. И развѣ

все это далеко отъ жизни? А именно эти понятія и представленія и должны быть даны на первыхъ ступеняхъ обученія. И только тогда, когда они будутъ усвоены, когда они сдѣлаются полнымъ достояніемъ учениковъ, можно приступить къ изученію математики, къ ознакомленію съ ея методами и законами, словомъ, къ пріобрѣтенію знаній. А у насъ начинаютъ съ того, что даютъ обрывки знаній, которые пріобрѣтаются большею частью на память и, не имѣя за собой правильныхъ понятій и представленій, остаются разрозненными, не находятъ себѣ примѣненій и скоро забываются. Такое преподаваніе, конечно, не только не даетъ знаній, но и не способствуетъ выработкѣ математическихъ сужденій и опредѣленій, не пробуждаетъ ума, не пріучаетъ къ наблюдательности, не развиваетъ самостоятельности и изобрѣтательности.

Цѣлью всякаго обученія должно быть полное всестороннее развитіе всѣхъ способностей и творческихъ силъ человѣка. Этому долженъ способствовать весь учебный матеріалъ: каждая отрасль науки должна будетъ развивать тѣ способности, тѣ стороны души человѣка, которыя ближе методамъ и цѣлямъ данной науки. Математика пріучаетъ къ обобщенію, къ абстракціи, къ синтезу, вмѣстѣ съ тѣмъ она учитъ наблюденію, дифференціаціи признаковъ и строгому всестороннему анализу. Она способствуетъ выработкѣ точнаго и краткаго языка, яснаго опредѣленія мысли и учитъ употребленію символовъ для выраженія идей, установленію связи между абсолютнымъ и относительнымъ, конкретнымъ и абстрактнымъ. Но для достиженія намѣченныхъ цѣлей математика не должна преподноситься въ видѣ ряда отдѣльныхъ положеній, истинъ и теоремъ, ничѣмъ не связанныхъ между собой, принимаемыхъ зачастую на вѣру, не намѣчающихъ путей къ послѣдующимъ изслѣдованіямъ.

Курсъ математики долженъ представлять изъ себя органическое цѣлое. Всѣ отдѣлы слѣдуетъ тѣсно взять между собой и, когда возможно, иллюстрировать. Черезъ весь курсъ должна ярко проходить идея о функціональной зависимости и о выраженіи всякой зависимости въ видѣ уравненія. Тогда начальный курсъ математики будетъ тѣсно связанъ съ изученіемъ математики, какъ науки.

Гдѣ возможно, должна быть установлена тѣсная связь между анализомъ и геометріей. Пространственныя представленія должны быть даны и восприняты возможно ярче и опредѣленнѣе. Этому будутъ способствовать ученіе о координатахъ и теорія проэкцій. Въ геометрію должно быть введено понятіе движенія, и статическое изученіе явленій должно быть замѣнено динамическимъ.

При разсмотрѣніи каждаго отдѣльнаго вопроса, надо указать на его мѣсто среди другихъ вопросовъ, на его конечную цѣль и назначеніе. Необходимо подчеркнуть, что нѣкоторыя положенія принимаются безъ доказательствъ, служатъ постулатами, аксіомами, познакомить съ тѣмъ, что называется гипотезами, сообщить тѣ изъ нихъ, которыя доступны, указать, насколько возможно, на вопросы, намѣченные для рѣшенія въ будущемъ.

Тогда станутъ яснѣе цѣли и задачи науки, откроются ея горизонты, и изученіе ея пріобрѣтетъ цѣнность и интересъ. Надо познакомить съ исторіей математики, указывая на ея этапы и на естественный путь ея развитія. Должны быть приведены также примѣненія различныхъ отдѣловъ математики къ изученію явленій природы, къ естественнымъ наукамъ и различнымъ отраслямъ техники. Не слѣдуетъ обособлять математику отъ другихъ наукъ, а напротивъ, указать на ея мѣсто среди нихъ, на ея значеніе для физики, химіи, механики, астрономіи и т. д.

Я буду говорить о преподаваніи математики въ первые шесть лѣтъ обученія, т. е. въ тотъ періодъ, за который долженъ быть пройденъ весь подготовительный курсъ. За этотъ періодъ дѣти должны воспринять всѣ основныя математическія представленія и понятія и получить достаточную подготовку, чтобы приступить къ систематическому изученію математики, какъ науки.

Прежде всего скажу, что на этой ступени обученія математика должна быть, насколько это возможно, сближена съ жизнью. Вѣдь сама жизнь съ ея нуждами, наблюденіе и изученіе явленій окружающаго міра, необходимость, а не абстрактныя соображенія породили математику. А преподаваніе должно

вестись именно такъ, чтобъ дѣти шли по естественному пути развитія науки, знакомились съ тѣмъ, что вызвало зарожденіе той или иной науки, того или иного ея отдѣла. Надо предлагать дѣтямъ задачи, которыя они должны выполнять сами и при рѣшеніи которыхъ они будутъ наталкиваться на необходимость знаній того или иного отдѣла математики. Тогда цѣль и назначеніе этого отдѣла, этого знанія будутъ ясны и опредѣленны.

Надо, чтобы преподаваніе было перенесено изъ классовъ въ лабораторіи, чтобъ ученики перестали повторять за учителемъ далекія, ненужныя, а подчасъ и непонятныя имъ истины, а чтобъ они сами доискивались этихъ истинъ, сами замѣчали и открывали основныя свойства явленій, сами находили опредѣленные математическіе законы и соотношенія, чтобъ все новое было плодомъ ихъ творческой работы, какъ бы ихъ маленькимъ открытіемъ.

Вотъ приблизительное содержаніе того курса, который я считаю возможнымъ пройти за первыя шесть лѣтъ обученія.

Содержаніе курса математики первыхъ шести лѣтъ обученія.

1-ый годъ.

Установленіе понятій — одинъ, много, мало, ничего, нѣсколько, больше, меньше—при помощи наглядныхъ пособій.

Счисленіе. Изученіе чиселъ 1 — 10. Наглядныя пособія. Четыре дѣйствія надъ числами перваго десятка.

Установленіе понятій — длина, ширина, высота, глубина, вѣсъ, скорость, сила, температура, время и т. п.—при помощи самостоятельныхъ работъ въ лабораторіяхъ.

Счисленіе отъ 10—20. Четыре дѣйствія въ предѣлахъ 10—20.

Первоначальныя понятія о доляхъ и дробяхъ.

Знакомство съ геометрическими тѣлами, фигурами и линіями. Кубъ, брусъ, пирамида. Цилиндръ, конусъ, шаръ. Четыреугольникъ, треугольникъ, кругъ. Горизонтальныя и вертикальныя линіи. Уровень и отвѣсъ. Прямыя, ломаныя и кривыя линіи. Острые, тупые и прямые углы.

2-ой годъ.

Счисленіе отъ 1—100. Четыре дѣйствія надъ числами первой сотни. Введеніе знаковъ.

Увеличеніе и уменьшеніе дробей; выраженіе однѣхъ долей въ другихъ; сравненіе дробей.

Введеніе буквенныхъ обозначеній.

Первыя попытки составленія формулъ и уравненій при рѣшеніи задачъ.

Самостоятельныя измѣренія и взвѣшиванія. Знакомство съ мѣрами длины, вѣса и времени. Планы и масштабы.

Первыя геометрическія понятія о тѣлахъ, фигурахъ, плоскостяхъ, углахъ, линіяхъ. Многогранники.

Многоугольники. Различные виды четыреугольниковъ и треугольниковъ. Круглыя тѣла и ихъ части.

Кругъ, окружность, діаметръ, радіусъ.

Параллельныя и перпендикулярныя линіи. Самостоятельныя изготовленія моделей. Лѣпка, вырѣзываніе изъ картона, черченіе, развертки. Опредѣленіе положенія точки на горизонтальной и вертикальной прямой. Координаты точки. Опредѣленіе мѣста дерева въ саду, города на картѣ и т. п. Графики. Изображеніе различныхъ величинъ, въ видѣ отрѣзковъ, прямоугольниковъ, секторовъ. Самостоятельныя измѣренія для полученія данныхъ при составленіи графиковъ.

3-ій годъ.

Письменное и устное счисленіе отъ 1—1000. Четыре дѣйствія надъ числами первой тысячи.

Понятіе объ отрицательныхъ числахъ. Установленіе понятія отрицательнаго числа: температура выше и ниже нуля, теченія рѣки и движеніе лодки противъ теченія, долгъ и капиталъ, прошедшее и будущее и т. д. Графическая иллюстрація.

Сокращенія дробей. Выраженіе дробей въ одинаковыхъ доляхъ. Четыре дѣйстія надъ дробями съ небольшими знаменателями.

Мѣры сыпучихъ тѣлъ, жидкости и бумаги. Происхожденіе мѣръ. Процентъ, какъ сотая часть. Самостоятельныя измѣренія.

Первоначальныя понятія о степени. Возвышеніе въ степень. Геометрическій способъ нахожденія квадрата и куба.

Понятіе о функціональной зависимости. Измѣненіе пути со временемъ, количества сгораемаго вещества со временемъ, объема тѣла съ температурой и т. д. Установленіе этой зависимости при помощи самостоятельныхъ наблюденій и работъ въ лабораторіяхъ. Основныя понятія по физикѣ. Выраженіе всякой зависимости въ видѣ уравненія. Графическое изображеніе функціональной зависимости. Рѣшеніе задачъ при помощи уравненія и при помощи графиковъ.

Понятіе объ объемахъ, поверхностяхъ и площадяхъ.

Самостоятельныя измѣренія. Развертки куба и параллелопипеда. Изготовленіе моделей. Наглядные способы опредѣленія объема и поверхности куба и параллелопипеда. Площадь квадрата, прямоугольника, треугольника. Аналогія съ возвышеніемъ въ квадратъ и въ кубъ. Квадратныя и кубическія мѣры.

Перемѣщеніе. Траэкторія. Поступательное движеніе. Параллельныя линіи. Вращательное движеніе. Перпендикулярныя линіи.

4 ый годъ.

Нумерація. Четыре дѣйствія надъ числами любой величины. Зависимость между факторами дѣйствій и ихъ результатами.

Метрическая система мѣръ.

Понятіе о десятичныхъ числахъ. Десятичные знаки, какъ продолженіе разрядныхъ единицъ вправо отъ разряда единицъ. Увеличеніе и уменьшеніе десятичныхъ чиселъ. Четыре дѣйствія надъ десятичными числами по аналогіи съ четырьмя дѣйствіями надъ цѣлыми числами.

Отрицательныя числа, какъ продолженіе натуральнаго ряда чиселъ влѣво отъ нуля. Абсолютная величина отрицательныхъ чиселъ. Четыре дѣйствія надъ отрицательными числами. Выясненіе правила знаковъ.

Уравненія съ отрицательными числами.

Второй, третій и четвертый координатные углы. Графики.

Составленіе таблицъ значеній функціи. Графическое изображеніе уравненій.

Понятіе о непрерывности и разрывѣ непрерывности. Величины соизмѣримыя и несоизмѣримыя.

Приближенныя вычисленія. Вычисленія съ данной точностью.

Отношенія и пропорціи.

Возвышеніе въ степень. Степени 10^2, 10^3, 10^4, ...

Объемъ призмы. Поверхность призмы. Площадь параллелограма, треугольника. Площади многоугольниковъ. Равенство и равновеликость фигуръ. Пропорціональныя линіи. Подобіе фигуръ. Знакомство съ землемѣрными инструментами. Землемѣрныя работы. Функціональная зависимость между элементами фигуры и ея площадью, элементами тѣла и его объемомъ. Установленіе этой зависимости опытнымъ путемъ. Понятіе о симметріи. Ось симметріи. Симметрія относительно точки, прямой, плоскости. Симметричныя фигуры. Доказательство нѣкоторыхъ теоремъ при помощи симметріи. Понятіе о проэкціи. Проэкціи точки, линіи, фигуры и тѣла на горизонтальную и вертикальную оси или плоскости проэкцій.

Изображеніе въ зеркалѣ, въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ зеркалахъ.

Основныя понятія по механикѣ. Сила, скорость, время, пройденный путь и т. д. Различные виды движенія.

5-ый годъ.

Понятіе о безконечности (натуральный рядъ чиселъ вправо и влѣво отъ нуля; прямая, плоскость и т. д.). Понятіе о безконечно-малыхъ (дроби, знаменателями которыхъ служатъ числа безконечно-большія и т. п.).

Ряды. Сумма первыхъ n нечетныхъ чиселъ $(1+3+5+ + \ldots . + 2n-1)$. Сумма первыхъ n четныхъ чиселъ $(2+4+6+ \ldots . + 2n)$. Сумма натуральнаго ряда чиселъ $(1+2+ \ldots . + n)$. Сумма квадратовъ $(1^2+2^2+ \ldots . + n^2)$.

Сумма кубовъ $(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)$ и т. д. Опредѣленіе суммъ этихъ рядовъ экспериментальнымъ путемъ.

Ариѳметическая прогрессія. Наглядный способъ опредѣленія суммы членовъ ариѳметической прогрессіи. Опредѣленіе послѣдняго члена. Геометрическая прогрессія. Опредѣленіе суммы членовъ геометрической прогрессіи при помощи алгебраическаго дѣленія и нагляднымъ способомъ. Опредѣленіе послѣдняго члена. Графическая иллюстрація прогрессій.

Рѣшеніе системы уравненій съ двумя неизвѣстными. Составленіе уравненій. Графическое изображеніе уравненій.

Наглядные способы опредѣленія объема цилиндра. Площадь круга. Длина окружности. Поверхность цилиндра. Зависимость между радіусомъ и площадью круга. Развертка поверхности цилиндра.

Объемъ пирамиды. Поверхность пирамиды. Построеніе. Развертка. Усѣченная пирамида. Объемъ конуса. Поверхность конуса. Понятіе объ эллипсѣ, гиперболѣ, параболѣ. Ихъ вычерчиваніе. Орбиты свѣтилъ.

Прямоугольныя оси координатъ, разстояніе между двумя точками. Выборъ осей координатъ.

6-ой годъ.

Дроби. Обращеніе десятичныхъ дробей въ простыя и простыхъ въ десятичныя.

Формулы $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)\ (a-b)$.

Геометрическое и алгебраическое доказательство этихъ формулъ.

Формулы $(a\pm b)^3$, $(a\pm b)^4$.

Квадратныя уравненія. Аналитическое и геометрическое рѣшеніе квадратныхъ уравненій. Объемъ шара. Поверхность шара. Географическія понятія: ось земли, меридіанъ, параллели и т. п. Тѣла вращенія. Начальныя понятія по астрономіи. Опредѣленіе высоты свѣтила, діаметра луны и т. д.

Рѣшеніе треугольниковъ. Понятіе о нѣкоторыхъ тригонометрическихъ функціяхъ. Составленіе таблицъ. Понятіе о геодезіи. Простѣйшія задачи.

сомъ тѣла и растяженіемъ пружины вѣсовъ, атмосфернымъ давленіемъ и показаніями барометра и т. д. Хорошей иллюстраціей функціональной зависимости является зависимость между пройденнымъ путемъ и временемъ, причемъ надо указать, что зависимость эта опредѣляется скоростью. Функціональная зависимость между всѣми этими величинами должна быть установлена, конечно, при помощи самостоятельныхъ работъ въ лабораторіяхъ.

Я предполагаю, что на этой ступени обученія дѣти будутъ проходить пропедевтическіе курсы физики, химіи, механики, астрономіи и будутъ знакомы съ начатками этихъ наукъ. Учитель математики долженъ быть освѣдомленъ относительно того, что̀ проходится на другихъ урокахъ и брать примѣры изъ матеріала, знакомаго ученикамъ. Если же такіе курсы не будутъ проходиться, то учитель математики долженъ будетъ самъ познакомить учениковъ съ первоначальными, доступными имъ понятіями изъ области этихъ наукъ и заставить ихъ продѣлать въ лабораторіяхъ нѣкоторые опыты. Пока ученики сами не опредѣлятъ, не установятъ опытнымъ путемъ этой зависимости, они не будутъ чувствовать и понимать ее.

При прохожденіи курса математики надо, гдѣ только возможно, обращать вниманіе на существованіе и значеніе функціональной зависимости. Такъ при прохожденіи ариѳметическихъ дѣйствій надо каждый разъ устанавливать зависимость между результатами и факторами дѣйствій; заставить дѣтей увеличить или уменьшить одно изъ данныхъ и потомъ опредѣлить, какое измѣненіе это внесло въ результатъ и какая между ними существуетъ зависимость. Дроби, пропорціи и проценты также могутъ служить для иллюстрированія идеи функціональной зависимости. Геометрія представляетъ особенно богатый матеріалъ въ этомъ отношеніи. Какъ только дѣти познакомятся съ различными тѣлами и фигурами и будутъ сами лѣпить, вырѣзать и склеивать ихъ, надо будетъ обратить вниманіе дѣтей на зависимость между элементами фигуръ и тѣлъ и ихъ величиной. Можно дать спицы различной величины и предложить строить изъ нихъ квадраты и прямоугольники; постепенно дѣти убѣдятся, что чѣмъ больше сторона квадрата

или прямоугольника, тѣмъ больше ихъ периметръ и площадь. Можно также предложить имъ построить или начертить прямоугольникъ съ данными сторонами, потомъ увеличить эти стороны въ 2 раза и на нихъ построить новый прямоугольникъ; изъ чертежа будетъ видно, что полученный прямоугольникъ будетъ равенъ четыремъ первоначальнымъ, т. е. площадь его будетъ въ четыре раза больше, а периметръ въ два раза больше площади и периметра первоначальнаго. Потомъ можно заставить вырѣзать и склеивать кубы различной величины и показать, что объемъ куба зависитъ отъ величины ребра, отъ площади основанія. Можно также заставить дѣлать шары изъ спицъ различной величины и указать на зависимость между радіусомъ шара и его объемомъ и поверхностью. Ограничусь этими примѣрами.

Послѣ цѣлаго ряда подобныхъ примѣровъ дѣти убѣдятся, что между величинами, съ которыми имъ приходилось имѣть дѣло, существуетъ нѣкоторая зависимость, причемъ зависимость эта иногда можетъ быть выражена вполнѣ опредѣленнымъ образомъ. Такъ, разсматривая зависимость между суммой и слагаемыми, находимъ, что $s=a+b+c+\ldots$; между разностью, уменьшаемымъ и вычитаемымъ $d=m-s$, между произведеніемъ и множителями $P=Mm$; между частнымъ, дѣлимымъ и дѣлителемъ, $d=\frac{D}{d}$; между площадью прямоугольника, его основаніемъ и высотой $s=bh$, между вѣсомъ, объемомъ и плотностью $p=vd$; между пройденнымъ путемъ, скоростью и временемъ $s=vt$, и т. д. (Съ буквенными обозначеніями дѣти уже знакомы; составляя всѣ эти выраженія, надо будетъ каждый разъ указывать на происхожденіе данныхъ обозначеній; такъ, имѣемъ: путь = скорость $\times$ время, spatium = velocitas $\times$ tempus, $s=vt$.). Всѣ эти выраженія, опредѣляющія зависимость между величинами и дающія возможность, зная нѣкоторыя изъ этихъ величинъ, опредѣлить черезъ нихъ другія, называются уравненіями. При такомъ подходѣ къ уравненіямъ легче будетъ выяснить въ будущемъ, что уравненіе есть частный видъ функціи.

Для выясненія зависимости между двумя величинами

лучше всего пользоваться графической интерпретаціей и графической записью явленій. Это особенно важно въ тѣхъ случаяхъ, когда зависимость между величинами не можетъ быть выражена уравненіями. Но прежде чѣмъ говорить о графикахъ, скажу нѣсколько словъ о теоріи координатъ.

Понятія о прямоугольныхъ осяхъ координатъ и объ опредѣленіи положенія точки, линіи, фигуры при помощи координатъ должны быть даны возможно раньше. Усвоеніе ихъ не представляетъ особеннаго затрудненія, такъ какъ дѣти сами часто пользуются ими, не отдавая себѣ въ этомъ отчета, для опредѣленія положенія какого-нибудь предмета, напр., шарика въ игрѣ, мячика или стула, мѣсто котораго они хотятъ запомнить, дерева, около котораго имъ хочется играть или сойтись и т. п. Они всегда отмѣряютъ шагами, рукой, веревкой разстояніе предмета отъ какихъ-нибудь двухъ приблизительно взаимно-перпендикулярныхъ пересѣкающихся прямыхъ: отъ стѣнъ комнаты, отъ забора сада и т. п., другими словами, они выбираютъ какія-нибудь оси координатъ и опредѣляютъ абсциссу и ординату данной точки; и обратно, зная абсциссу и ординату, опредѣляютъ они положеніе точки.

Конечно, начинать надо будетъ съ того, чтобы научить дѣтей опредѣлять положеніе точки относительно вертикальной и горизонтальной оси.

Понятіе объ опредѣленіи положенія точки при помощи координатъ можно дать слѣдующимъ образомъ: предложить дѣтямъ игру, гдѣ бы внутри прямоугольника были какъ-нибудь расположены шарики, напр., маленькій комнатный крокетъ. Въ крокетѣ будутъ шары и ворота. Положимъ, дѣтямъ надо будетъ запомнить, гдѣ стояли ворота или гдѣ лежалъ какой-нибудь шаръ, чтобъ снова положить ихъ на то же мѣсто.

Какъ имъ поступить въ этомъ случаѣ?

Если вы имъ предложите этотъ вопросъ, то можете получить слѣдующій отвѣтъ: надо какъ-нибудь отмѣтить это мѣсто мѣломъ, краской, сдѣлать дырочку и т. п. Съ нашей точки зрѣнія, этотъ отвѣтъ, конечно, совершенно не цѣненъ.

Если мы получимъ такой отвѣтъ, то можно указать дѣтямъ на неудобство подобнаго разрѣшенія вопроса.

Можетъ быть, нѣкоторыя дѣти предложатъ отмѣрить разстояніе отъ шара до вершины угла, составленнаго сторонами прямого угла, и запомнить его, а потомъ отмѣрить это разстояніе и положить туда шаръ. Тогда надо имъ предоставить это дѣлать. Они отмѣрятъ это разстояніе и возьмутъ шаръ; но когда они захотятъ положить его, то убѣдятся, что такихъ точекъ будетъ много; тутъ можно ихъ заставить отмѣтить нѣсколько такихъ точекъ и указать, что онѣ лежатъ на дугѣ окружности, всѣ точки которой находятся на данномъ разстояніи отъ точки пересѣченія сторонъ прямого угла; что они измѣрили радіусъ и могутъ найти всѣ точки, лежащія на дугѣ даннаго радіуса, а не одну опредѣленную точку (объ окружности они уже имѣютъ понятіе). Тогда дѣти поймутъ, что не достаточно знать одно разстояніе, что необходимо знать два.

Наконецъ, нѣкоторыя, послѣ всего этого, а вѣрнѣе сразу, скажутъ, что надо отмѣрить разстояніе отъ шара до сторонъ прямого угла. Они уже знаютъ, что разстоянія измѣряются по перпендикулярамъ. Дѣти измѣрятъ эти разстоянія, возьмутъ шаръ, но, когда они захотятъ снова положить его, то явится новое затрудненіе: они не будутъ знать, откуда отмѣрять эти разстоянія.

Тогда надо заставить ихъ снова положить шаръ и отъ шара до сторонъ прямого угла натянуть веревки или положить палочки такъ, чтобъ получился прямоугольникъ. Они увидятъ, что разстоянія отъ вершины прямого угла до точекъ пересѣченія упомянутыхъ перпендикуляровъ со сторонами прямого угла равны разстояніямъ отъ шара до сторонъ прямого угла и что можно измѣрять эти разстоянія отъ точки пересѣченія сторонъ прямого угла по этимъ сторонамъ, т. е. отъ опредѣленной точки по опредѣленнымъ прямымъ, иначе говоря, отъ начала координатъ по осямъ. Зная эти разстоянія, они отмѣрятъ ихъ отъ начала координатъ по осямъ и въ полученныхъ точкахъ возставятъ перпендикуляры; точка ихъ пересѣченія и будетъ искомымъ мѣстомъ шара.

Можно заставить дѣтей найти такимъ образомъ мѣста нѣсколькихъ шаровъ, т. е. положеніе нѣсколькихъ точекъ.

Потомъ надо положить шаръ во 2-ой координатный уголъ. Одной осью будетъ служить та же сторона прямоугольника, а вторую можно получить, продолживъ другую сторону прямоугольника. Какъ опредѣлить положеніе шара относительно осей, дѣти уже знаютъ. Понятіе о 2-омъ координатномъ углѣ надо давать тогда, когда уже пройдены отрицательныя числа и дѣти знаютъ, что отрѣзки прямыхъ считаются положительными въ одну сторону отъ опредѣленной точки и отрицательными въ другую. Тогда они поймутъ, что въ данномъ случаѣ абсцисса будетъ отрицательная. Послѣ этого они должны опредѣлять положеніе шара въ 3-емъ и 4-омъ координатныхъ углахъ.

Можно будетъ также предложить дѣтямъ опредѣлить мѣсто даннаго ученика въ классѣ, дерева въ саду, города на картѣ и т. д., иначе говоря, найти координаты точки. Потомъ можно заставить ихъ сдѣлать обратную задачу, т. е. по даннымъ координатамъ опредѣлить положеніе точки. Можно предложить имъ, напр., посадить дерево на разстояніи трехъ саженей отъ одного забора и двухъ саженей отъ другого и т. п. Дѣти сами должны выбирать оси и начало координатъ.

Когда они освоятся съ опредѣленіемъ положенія точки относительно осей координатъ, надо будетъ заставить ихъ чертить оси координатъ, координаты точки и познакомить съ терминами.

Когда уже дѣти знаютъ, что такое функціональная зависимость и имѣютъ понятіе объ осяхъ координатъ, можно перейти къ графической записи явленій. Съ графиками въ видѣ отрѣзковъ, прямоугольниковъ, секторовъ и круговъ, конечно, надо знакомить дѣтей раньше, какъ это мною и указано въ программѣ.

О значеніи графиковъ и такой записи много говорить не приходится; это теперь достаточно признано, и графиками широко пользуются во всѣхъ отрасляхъ науки. Графики имѣютъ для дѣтей еще то громадное значеніе, что развиваютъ наблюдательность и вниманіе, пріучаютъ къ систематическому наблюденію явленій, даютъ болѣе яркое и отчетливое представленіе объ этихъ явленіяхъ и наглядно иллюстрируютъ функціональную зависимость.

Матеріаломъ для графической записи могутъ служить измѣненія температуры, барометрическаго давленія, количества народонаселенія, посѣщаемость уроковъ, глубина рѣкъ, измѣненіе цѣнъ на какіе-нибудь товары, измѣненіе объема газа отъ давленія, удлиненіе металлическаго стержня отъ измѣненія температуры и всѣ тѣ примѣры, которые были разобраны съ дѣтьми для выясненія функціональной зависимости.

Для вычерчиванія графиковъ надо пользоваться разграфленой бумагой, вначалѣ съ большими клѣтками, а потомъ, для вычерчиванія непрерывныхъ графиковъ, миллиметровой бумагой. Дѣти имѣютъ уже понятіе о координатахъ, и потому имъ можно предложить выбрать самимъ какую-нибудь точку на этой бумагѣ за начало координатъ и какія-нибудь двѣ прямыя за оси координатъ.

Потомъ надо произвести съ дѣтьми рядъ наблюденій, напр., надъ удлиненіемъ резиновой нити въ зависимости отъ увеличенія вѣса привѣшеннаго къ ней груза или надъ растяженіемъ пружины подъ вліяніемъ измѣненія дѣйствующей на нее силы, и полученныя изъ этихъ наблюденій данныя записать.

Для первыхъ примѣровъ числа должны быть небольшія, чтобы каждую клѣтку бумаги можно было считать за единицу. Данныя хорошо записывать въ видѣ двухъ столбцовъ, изъ которыхъ одинъ представляетъ послѣдовательныя измѣненія одной величины, а другой - соотвѣтствующія измѣненія другой, зависящей отъ первой, т. е., иначе говоря, составить таблицу значеній функціи.

Надо указать, что значенія одной величины должны быть отложены по одной оси, а значенія другой—по другой. Для того же, чтобъ получить общій характеръ явленія, дѣти должны найти точки, соотвѣтствующія обоимъ измѣненіямъ.

Когда будутъ нанесены всѣ данныя, полученныя изъ наблюденія, въ видѣ точекъ, надо ихъ соединить. Полученная линія и будетъ изображать наблюдаемое явленіе, будетъ его графической интерпретаціей.

Такимъ образомъ можетъ быть дано дѣтямъ понятіе о томъ, какъ составлять графики по даннымъ числовымъ зна-

ченіямъ. Послѣ этого надо будетъ ихъ научить обратному процессу, т. е. тому, какъ, имѣя графикъ, найти числовыя значенія какой-нибудь его точки. Напр., имѣя графикъ температуры, опредѣлить температуру въ данный день.

Графиками можно пользоваться для опредѣленія нѣкоторыхъ неизвѣстныхъ значеній опредѣляемыхъ величинъ. Напр.: дано количество народонаселенія за нѣкоторые года, найти графикъ, изображающій измѣненія количества народонаселенія и опредѣлить по графику количество народонаселенія въ промежуточные и послѣдующіе года.

Послѣ того, какъ будетъ рѣшено достаточно примѣровъ на графики и дѣти будутъ имѣть ясное представленіе о функціональной зависимости, можно будетъ имъ дать понятіе о функціи.

Новымъ тутъ, въ сущности говоря, будетъ только слово функція и ея обозначеніе. Можно будетъ вспомнить примѣры функцій, которые встрѣчались раньше, и заставить записать, что, напр., объемъ тѣла есть функція температуры, пройденный путь — функція скорости, притяженіе между данными массами—функція разстоянія между ними и т. д.

За недостаткомъ времени не буду подробно говорить о томъ, какъ дать дѣтямъ понятіе о функціи и о графическомъ изображеніи уравненій, скажу только, что, какъ видно изъ всего изложеннаго выше, это не представляетъ особеннаго затрудненія, а, между тѣмъ, имѣетъ громадное значеніе какъ для дальнѣйшаго прохожденія курса, такъ и для того, чтобы сразу ввести дѣтей въ область математики, какъ науки.

Перейду теперь къ геометріи. Прежде всего скажу, что обученіе геометріи должно начинаться одновременно съ обученіемъ счету. Когда даются основныя понятія счета, измѣренія, тогда же должны быть даны основныя понятія формы, величины и положенія. Для этого на первыхъ же ступеняхъ обученія долженъ проходиться наглядный пропедевтическій курсъ геометріи. «Пріученіе дѣтей къ наблюденію простыхъ геометрическихъ формъ и соотношеній между предметами, которые ежедневно попадаются на глаза, обученіе ихъ употребленію простыхъ инструментовъ для геометрическихъ построеній и

ознакомленіе ихъ съ разнообразными наглядными способами опредѣленія длины, площади, объема и положенія предметовъ— все это самое естественное и самое могучее средство, какъ для пріученія ихъ къ наблюдательности, такъ и для выработки привычки къ сосредоточенному и продолжительному вниманію».

Геометрія на этой ступени должна быть, насколько это возможно, сближена съ жизнью. Надо научить дѣтей подмѣчать геометрическія формы въ окружающемъ насъ мірѣ, въ природѣ. Примѣрами могутъ служить поверхность воды въ озерахъ, прудахъ, дуга радуги, конусообразная форма горы, почти вертикальное направленіе растущаго дерева, причемъ можно при помощи отвѣса опредѣлить его уклоненіе отъ вертикальнаго направленія и уголъ, который онъ составляетъ съ горизонтальной и вертикальной линіями и т. п. Такихъ примѣровъ можно подобрать безчисленное множество.

Пространственныя представленія должны даваться дѣтямъ съ самаго начала, одновременно съ плоскостями, и даже предшествовать имъ. Понятіе о тѣлѣ, объемѣ легче дать ребенку, чѣмъ понятіе о фигурѣ, плоскости, линіи. Дѣти все время имѣютъ дѣло съ тѣлами; тѣла производятъ на глазъ болѣе рельефное, выпуклое впечатлѣніе и легче поддаются воспріятію при помощи осязанія.

Каждому ребенку можно показать—да онъ и видѣлъ—шаръ, цилиндръ, конусъ, пирамиду; на этихъ тѣлахъ легко выяснить понятіе объема, поверхности, установить разницу между кривой поверхностью и плоскостью. Поверхность должна разсматриваться, какъ граница, предѣлъ тѣла, линія—какъ граница поверхности, точка—какъ граница линіи. Можно также показать, что линія, плоскость, тѣло получаются отъ движенія точки, линіи, плоскости. Для установленія всѣхъ этихъ понятій надо широко пользоваться всевозможными наглядными пособіями, заставлять дѣтей вырѣзывать, лѣпить, клеить разныя тѣла, получать ихъ развертки, вычерчивать ихъ и т. д.

Когда дѣти привыкнутъ разсматривать предметы со стороны ихъ формы, можно будетъ приступить къ разсмотрѣнію предметовъ со стороны величины. Для этого надо познакомить дѣтей съ тѣмъ, какъ производить линейныя измѣренія, какъ

опредѣлять площади и объемы фигуръ и тѣлъ. Конечно, я говорю о чисто наглядныхъ способахъ измѣренія. При этомъ, прежде всего, дѣтямъ надо дать понятіе о томъ, что предметы различной формы могутъ имѣть одинаковые площади и объемы. Для этого можно имъ предложить продѣлать слѣдующее: вырѣзать изъ бумаги или изъ картона какую-нибудь фигуру, напр., прямоугольникъ, разрѣзать ее на части и приложить эти части другъ къ другу въ различныхъ комбинаціяхъ. Полученныя фигуры будутъ имѣть различныя формы, но площади ихъ будутъ равны. Продѣлавъ нѣсколько такихъ опытовъ, дѣти познакомятся съ тѣмъ, чтó называется равновеликими фигурами.

Для сравненія тѣлъ различныхъ формъ, но одинаковыхъ объемовъ, можно взять сосуды различныхъ формъ и одинаковыхъ объемовъ и предложить дѣтямъ всыпать въ нихъ одинаковое количество песку, или вливать одно и то же количество воды; можно также взять какое-нибудь тѣло, разрѣзать его на части и сложить ихъ въ различныхъ комбинаціяхъ, или взять столбикъ какихъ-нибудь кружковъ и сдвинуть нѣкоторые изъ нихъ и т. п.

Послѣ этого можно перейти къ опредѣленію площадей и объемовъ. Наглядныхъ способовъ для ихъ опредѣленія существуетъ множество.

Перейду теперь къ вопросу о симметріи.

Ученіе о симметріи обыкновенно отсутствуетъ въ нашихъ курсахъ, а между тѣмъ, оно имѣетъ громадное значеніе, такъ какъ способствуетъ большей ясности плоскостныхъ и пространственныхъ представленій и такъ какъ на основаніи симметріи могутъ быть доказаны гораздо проще, нагляднѣе и рельефнѣе многія теоремы.

Введеніе понятія о симметріи не представляетъ затрудненія даже на первой ступени обученія, такъ какъ симметрія очень распространена въ природѣ, наблюдается почти во всѣхъ окружающихъ предметахъ и съ ней очень свыкся нашъ глазъ. Симметричны всѣ животныя, почти всѣ цвѣты, листья, человѣкъ, большая часть зданій, столы, стулья, почти всѣ орнаменты, нѣкоторыя буквы и т. д.

Должно быть дано понятіе о симметріи относительно прямой, плоскости и точки.

Для выясненія понятія о симметріи относительно прямой можно поступить слѣдующимъ образомъ: взять листъ бумаги, сложить его вдвое и на одной изъ сторонъ нарисовать чернилами какую-нибудь фигуру; потомъ, пока чернила еще не высохли, сложить опять этотъ листъ, какъ въ первый разъ. На другой части листа получится изображеніе, симметричное первому относительно линіи сгиба листа, т. е. относительно прямой.

Примѣромъ симметріи относительно плоскости можетъ служить изображеніе предмета въ плоскомъ зеркалѣ. Это изображеніе будетъ сходно съ предметомъ, но не тождественно ему. Такъ, напр., правая рука дастъ въ зеркалѣ лѣвую, перчатка съ одной руки дастъ со своимъ изображеніемъ въ зеркалѣ пару и т. д.

Примѣрами симметріи относительно точки, т. е. центральной симметріи, могутъ служить: кругъ, эллипсъ, правильный многоугольникъ съ четнымъ числомъ сторонъ.

Надо познакомить дѣтей съ вертикальной и горизонтальной симметріей, съ нѣкоторыми свойствами симметричныхъ фигуръ и теоремами, доказываемыми при помощи симметріи. Напр.: 1) если двѣ точки симметричны относительно какой-нибудь прямой, то эта прямая перпендикулярна къ прямой, соединяющей эти двѣ точки въ ея серединѣ; 2) осью симметріи угла является его биссектриса; 3) въ равнобедренномъ треугольникѣ высота, медіана и биссектриса относительно одной и той же вершины совпадаютъ и служатъ осью симметріи; 4) осью симметріи круга служитъ діаметръ.

Приведу доказательства послѣднихъ двухъ теоремъ.

3) Имѣемъ равнобедренный треугольникъ ABC; $AB=AC$; AD биссектриса угла A. Если повернуть $\triangle ADB$ вокругъ AD, то AB совпадетъ съ AC, вслѣдствіе равенства угловъ DAB и DAC, точка B совпадетъ съ точкой C, такъ какъ $AB=AC$. Отсюда имѣемъ, что C симметрично съ B относительно AD. Слѣдовательно, AD, перпендикуляръ къ BC въ ея серединѣ, и есть высота и медіана треугольника.

4) Пусть A_1 симметрично съ A относительно оси BC; $OA_1 = OA$. Если одна изъ этихъ прямыхъ служитъ радіусомъ, т. е. одна изъ этихъ точекъ лежитъ на окружности, то и другая принадлежитъ окружности. Значитъ, діаметръ служитъ осью симметріи окружности.

Ограничусь этими примѣрами и перейду къ слѣдующему вопросу.

Въ геометрію по возможности долженъ вводиться элементъ движенія. Статическое изученіе явленій должно уступить мѣсто динамическому. Такъ, понятіе о параллельности должно быть связано съ поступательнымъ движеніемъ; перпендикулярныя линіи и плоскости могутъ быть разсмотрѣны съ точки зрѣнія вращательнаго движенія; равенство фигуръ можетъ быть доказано при помощи ихъ переноса.

Прежде всего надо дать дѣтямъ понятіе о перемѣщеніи, какъ о такомъ измѣненіи положенія тѣла, при которомъ не мѣняется ни его форма, ни его величина. Потомъ познакомить ихъ съ самыми простыми видами движенія: поступательнымъ и вращательнымъ.

Для выясненія понятія поступательнаго движенія можно пользоваться треугольникомъ и линейкой. Скольженіе треугольника по линейкѣ и есть поступательное движеніе. Линейка является неподвижной плоскостью, а треугольникъ движущейся плоскостью. Примѣрами могутъ также служить: листъ бумаги, который мы вкладываемъ въ конвертъ, или ящикъ, который выдвигается или задвигается.

Покажу теперь, какъ вывести понятіе о параллельности при помощи поступательнаго движенія. Прежде всего надо, чтобы дѣти сами путемъ измѣренія убѣдились, что при поступательномъ движеніи всѣ точки движущагося тѣла проходятъ одинаковыя разстоянія. Для полученія параллельныхъ линій нужно заставить скользить треугольникъ вдоль линейки и отчерчивать карандашемъ одну сторону треугольника; всѣ точки полученныхъ линій будутъ отстоять другъ отъ друга на равныхъ разстояніяхъ, т. е. эти линіи будутъ параллельны другъ другу.

Понятіе о параллельныхъ плоскостяхъ можетъ быть вы-

яснено слѣдующимъ образомъ: возьмемъ книгу, положимъ ее на край выдвинутаго ящика такъ, чтобы она заняла наклонное положеніе по отношенію къ ящику, и будемъ задвигать ящикъ. Книга будетъ совершать поступательное движеніе. Всѣ точки ея при этомъ будутъ проходить равныя разстоянія, и послѣдовательныя положенія, занимаемыя переплетомъ книги, будутъ параллельны другъ другу.

Программный характеръ темы моего доклада не позволяетъ мнѣ останавливаться дольше на разработкѣ каждаго отдѣльнаго вопроса.

Сейчасъ истекаетъ время, данное мнѣ для доклада, и потому мнѣ не удастся поговорить о задачахъ. Скажу только, что матеріалъ задачъ долженъ быть по возможности разнообразный, жизненный и интересный, данныя должны быть взяты, напр., изъ физики, механики, астрономіи, геодезіи, исторіи, біологіи, географіи и т. д.; конечно, нужно брать самыя простыя соотношенія. Для составленія задачъ надо пользоваться результатами, полученными самими дѣтьми при измѣреніяхъ и изъ опытовъ при работахъ въ лабораторіяхъ. Должны быть совершенно исключены искусственные способы рѣшенія задачъ, ихъ должны замѣнить уравненія и графики, которые значительно облегчатъ какъ пониманіе, такъ и рѣшеніе задачъ.

Я думаю, что прохожденіе курса математики въ младшихъ классахъ по предлагаемой мною программѣ дастъ возможность ввести въ старшіе классы основы такъ называемой высшей математики, и этого настоятельно требуетъ сама жизнь. Наука идетъ впередъ и съ каждымъ годомъ становится сложнѣе, техника развивается съ невѣроятной быстротой, математическіе выводы и законы находятъ себѣ все болѣе широкое примѣненіе, жизнь предъявляетъ къ человѣку все большія и большія требованія, а мы продолжаемъ учить дѣтей въ средней школѣ тому, чему ихъ учили много лѣтъ тому назадъ».

Тезисы.

1. Математика не такъ далека отъ жизни, какъ это кажется.

2. Курсъ математики долженъ быть составленъ такъ, чтобы ученики чувствовали въ немъ органическое цѣлое.

3. Черезъ весь курсъ должна ярко проходить идея о функціональной зависимости и о выраженіи всякой зависимости въ видѣ уравненія.

4. Для выясненія зависимости между двумя величинами должны быть введены графики и графическія интерпретаціи.

5. По мѣрѣ возможности должна быть установлена тѣсная связь между анализомъ и геометріей.

6. Пространственныя представленія должны быть даны и восприняты возможно ярче и опредѣленнѣе. Для этого должны быть введены въ курсъ основы аналитической геометріи и теоріи проэкцій.

7. Въ геометрію должно быть введено понятіе движенія. Статистическое изученіе явленій должно быть замѣнено динамическимъ.

8. Къ пріобрѣтенію знанія можно приступить только тогда, когда уже усвоены основныя математическія понятія и представленія.

9. Основныя математическія представленія и понятія должны быть установлены при помощи самостоятельныхъ работъ въ лабораторіяхъ.

10. Математическіе законы и соотношенія должны выводиться самими учениками, быть плодомъ ихъ творческой работы, какъ бы ихъ собственнымъ открытіемъ.

11. Между математикой и другими науками должна быть установлена тѣсная связь.

Пренія по докладу Н. А. Тамамшевой.

П. А. Извольскій (Москва). „Вопросъ о выполнимости намѣченной въ шесть лѣтъ программы вызываетъ сомнѣнія. Нельзя такъ просто относиться къ тѣмъ упражненіямъ, которыя необходимы для усвоенія матеріала. Примѣромъ служатъ упражненія на усвоеніе понятій: „столько же“, „больше“, „меньше“. Практика показываетъ, что организовать такія упражненія (безъ введенія чиселъ) для цѣлаго класса крайне затруднительно, но, повидимому, они легко и съ пользой могутъ быть примѣнены къ обученію отдѣльныхъ дѣтей. Кромѣ того, ошибкою является то построеніе „малаго“ курса геометріи, которое начинается съ разсмотрѣнія искусственныхъ тѣлъ, (куба, призмы и т. п.). Слишкомъ много основныхъ геометрическихъ образовъ надо усвоить для усвоенія понятія о кубѣ (или его модели). Нѣтъ, этотъ „малый“ курсъ долженъ базироваться на иныхъ основаніяхъ, и первымъ изъ нихъ является сознаніе: „я умѣю построитъ прямую линію“.

К. И. Соколовскій (Маріинскъ, Томск. г.). „Докладчица говорила о томъ, что преподаваніе математики въ теченіе первыхъ шести лѣтъ должно имѣть связь съ жизнью, а между тѣмъ по программѣ, предложенной ею, на третій годъ проходится счисленіе лишь въ предѣлѣ тысячи, тогда какъ въ жизни часто дѣтямъ приходится встрѣчаться съ числами значительно большими. Что касается ознакомленія съ координатами, функціями и т. п., то, конечно, это хорошо, и будетъ ли это сдѣлано въ шесть или семь лѣтъ, это безразлично.—Возражаю только противъ того, что преподаватели математики должны знакомить учащихся съ основами другихъ наукъ, если преподаватели соотвѣтствующихъ предметовъ не успѣютъ этого сдѣлать. Преподаватель математики, задавшись цѣлью знакомить учащихся съ основами другихъ дисциплинъ, тѣмъ самымъ нанесетъ ущербъ своему предмету. — Докладчица говоритъ: „можно заставить сдѣлать то-то и то-то“. Да, заставить можно, но усвоятъ ли учащіеся преподносимый матеріалъ? Вызубрятъ и будутъ отвѣчать, но сознательно ли?“

В. А. Соколовъ (Майкопъ, Кубанск. обл.). „Въ докладѣ цѣнны указаніе на необходимость введенія вопросовъ изъ физики и требованіе связи преподаванія ариѳметики съ жизнью. Но безконечно-малыя не удастся въ первыя шесть лѣтъ обученія связать съ жизнью. Начинать выясненіе безконечно-малыхъ при помощи дробей нельзя, какъ это показываетъ опытъ; лучше выяснить это геометрическимъ путемъ. Огульное обвиненіе современной школы

въ томъ, что функціональная зависимость и симметрія не разсматриваются, несправедливо".

Н. А. Колубовская (Спб.). „Желательно выяснить, есть ли указанный курсъ систематическій или только подготовительный? Если подготовительный, то гдѣ и какъ можетъ итти систематическій курсъ? Если можно привѣтствовать указанный матеріалъ, то лишь для практическихъ работъ. Желательно указаніе, гдѣ и когда такой курсъ былъ проведенъ?"

А. Ф. Гатлихъ (Москва). „Въ докладѣ нельзя не привѣтствовать требуемаго при преподаваніи принципа наглядности и жизненности. Но погоня за многимъ создастъ много недоразумѣній Какъ, напр., опытнымъ путемъ, какъ говоритъ докладчица, дать понятіе безконечности, интерполяціи и экстраполяціи? Что останется отъ такого курса у дѣтей, начинающихъ обученіе, повидимому, съ самаго малаго возраста?"

Н. А. Тамамшева (Спб.). „На заданные мнѣ вопросы отвѣчу слѣдующее".

„Курса по предлагаемой мною программѣ цѣликомъ я не проходила, такъ какъ я занималась въ женской гимназіи Министерства Народнаго Просвѣщенія, и не была свободна въ выборѣ матеріала. Но нѣкоторые вопросы, напр., отрицательныя числа, графики, опредѣленіе положенія точки при помощи координатъ, нѣкоторые наглядные способы опредѣленія площадей и объемовъ были пройдены мною, и не скажу, чтобы они вызвали больше затрудненій, чѣмъ тѣ вопросы, которые вводятся обыкновенно въ программу. Курсъ этотъ разсчитанъ на первые шесть лѣтъ обученія, т. е. приблизительно на возрастъ отъ 7 до 13 лѣтъ".

„Мнѣ возражали, что пропедевтическій курсъ геометріи нельзя начинать съ разсмотрѣнія искусственныхъ тѣлъ, а надо сначала дать дѣтямъ опредѣленіе точки, прямой. Но тѣло производитъ болѣе рельефное, выпуклое впечатлѣніе, оно легче поддается воспріятію органовъ чувствъ, съ нимъ дѣти постоянно встрѣчаются въ жизни, и поэтому выгоднѣе исходить отъ него и черезъ него притти къ понятію плоскости, линіи, точки".

„Мнѣ говорили также, что „въ предлагаемой мною программѣ на третій годъ приходится счисленіе лишь въ предѣлѣ тысячи, между тѣмъ, какъ въ жизни дѣтямъ приходится встрѣчаться съ числами значительно большими". Я не считаю, конечно, обязательнымъ ограничиваться одной только первой тысячью; можно захватить числа первыхъ тысячъ, но не слѣдуетъ затруднять дѣтей вычисленіями надъ большими числами, тѣмъ болѣе, что съ ними приходится очень рѣдко имѣть дѣло".

„Мнѣ было указано также, что врядъ ли будутъ доступны

дѣтямъ понятія интерполяціи и экстраполяціи, но я вѣдь предлагаю выяснить эти понятія на рядѣ задачъ при помощи графическаго метода послѣ того, какъ дѣтьми будутъ вполнѣ усвоены понятія о функціональной зависимости, о графикахъ, уравненіяхъ и составленіи таблицъ значеній функцій. При такихъ условіяхъ не думаю, чтобы это могло вызвать серьезное затрудненіе".

„Насчетъ вопроса о безконечности скажу слѣдующее: понятіе о безконечности врывается съ самаго начала въ изученіе математики. Образуя натуральный рядъ чиселъ прибавленіемъ послѣдовательно по единицѣ, дѣти замѣчаютъ, что рядъ этотъ не имѣетъ конца, что какъ бы велико ни было послѣднее число этого ряда, мы всегда можемъ прибавить къ нему единицу и, слѣдовательно, получить число больше предыдущаго. Отсюда естественно вытекаетъ понятіе о безконечности. Отрицательныя числа, дѣленіе чиселъ на разряды, дроби, простыя и десятичныя, также могутъ служить иллюстраціей понятія о безконечности. Приступая къ изученію геометріи, мы сейчасъ же наталкиваемся на понятіе о безконечности прямой и плоскости. Такъ не лучше ли дать дѣтямъ при изученіи величинъ понятіе о безконечности, помочь имъ разобраться въ этомъ вопросѣ, чѣмъ замалчивать его и вносить незаконченность въ математическія представленія дѣтей, тѣмъ болѣе, что понятіе о безконечности какъ нельзя лучше вводитъ дѣтей въ область математики и роднитъ съ ея методами".

II. О нѣкоторыхъ измѣненіяхъ въ программѣ по алгебрѣ въ женскихъ гимназіяхъ Министерства Нар. Просв., которыя желательно было-бы сдѣлать временно впредь до общей реформы женскихъ гимназій.

Докладъ Г. П. Кузнецова, составленный по порученію Новочеркасскаго Математическаго Кружка (Новочеркасскъ).

«Въ настоящее время, какъ извѣстно, программа по математикѣ въ семи-классныхъ женскихъ гимназіяхъ Мин. Нар. Пр. составлена такимъ образомъ, что курсъ ариѳметики проходится въ младшихъ четырехъ классахъ (I—IV) съ повтореніемъ его въ VII-мъ классѣ; курсъ же алгебры и геометріи проходится въ старшихъ классахъ (съ V-го по VII), если не считать пропедевтическаго курса геометріи, который долженъ

проходиться въ первыхъ трехъ классахъ (I-II-III), но который обычно не проходится, какъ таковой, въ виду недостатка времени.

Такъ какъ цѣлью нашего доклада является желаніе указать на неудобства, съ которыми приходится встрѣчаться при прохожденіи курса алгебры въ женскихъ гимназіяхъ Мин. Нар. Просв. и которыя желательно было бы устранить, то мы перейдемъ непосредственно къ главной нашей задачѣ, т. е. къ условіямъ прохожденія курса алгебры въ настоящее время, отчасти только касаясь условій прохожденія геометріи и совсѣмъ не останавливаясь на ариѳметикѣ.

Самое главное неудобство въ прохожденіи курса математики въ старшихъ классахъ заключается въ томъ, что изученіе алгебры начинается одновременно съ геометріей, т. е. ученицы V класса должны сразу входить въ два новыхъ круга идей, что, конечно, должно быть для нихъ весьма затруднительнымъ.

Далѣе, если всмотрѣться въ программу по алгебрѣ женскихъ гимназій, то изъ нея можно видѣть, что программа составлена такъ, что алгебра должна проходиться, какъ предметъ вспомогательный, необходимый для изученія геометріи; между тѣмъ, какъ изъ того самаго факта, что алгебра проходится, начиная съ V класса, одновременно съ геометріей, слѣдуетъ, что алгебра не можетъ долгое время оказывать пользу для изученія геометріи, какъ напр.:

1) чуть-ли не съ самаго начала рѣшенія численныхъ задачъ по геометріи необходимо прибѣгать къ уравненіямъ 1-ой степени (задачи на углы въ треугольникѣ, многоугольникахъ). А такъ какъ ученицы не умѣютъ рѣшать уравненій, то приходится ограничивать кругъ задачъ, избираемыхъ для рѣшенія пользуясь задачами, которыя можно рѣшать пріемами, извѣстными изъ ариѳметики;

2) при рѣшеніи задачъ на прямоугольный треугольникъ необходимо умѣть извлекать квадратный корень изъ чиселъ, какъ изъ цѣлыхъ, такъ и изъ дробныхъ (съ извѣстной точностью), или же надо каждый разъ подбирать точные квадраты цѣлыхъ чиселъ, квадратные корни изъ которыхъ можно находить съ

помощью разложенія на первоначальные множители, что, во-первыхъ, весьма затруднительно при большихъ числахъ, а, во-вторыхъ, не всегда возможно, такъ какъ не всѣ данныя и не во всякомъ треугольникѣ могутъ быть всегда числами раціональными (треугольникъ съ угломъ въ 45°, 60° и т. п., діагональ квадрата);

3) при рѣшеніи задачъ на правильные многоугольники необходимо знать дѣйствія надъ радикалами (сторона квадрата, треугольника и т. д.);

4) при рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ приходится встрѣчаться съ квадратнымъ уравненіемъ (a, q, b, p, c?—Рыбкинъ, 342) и т. п.

Второе неудобство заключается въ распредѣленіи отдѣльныхъ статей алгебры по классамъ и состоитъ въ слѣдующемъ: почти весь учебный матеріалъ по алгебрѣ падаетъ на VI классъ (см. программу VI кл.), въ то время, какъ въ V классѣ полагается проходить только предварительныя свѣдѣнія, приведеніе подобныхъ членовъ и дѣйствія надъ одночленами, а курсъ VII класса циркуляромъ Министра Нар. Пр. отъ 8 іюня 1900 г. перенесенъ цѣликомъ въ VIII классъ. Правда, въ программѣ по алгебрѣ VI класса нѣтъ упоминанія о разложеніи многочленовъ на первоначальные множители и объ алгебраическихъ дробяхъ, но вѣдь всякій изъ насъ знаетъ, что выкинуть этотъ отдѣлъ совершенно невозможно, и что прохожденіе его необходимо, какъ для развитія техники алгебраическихъ вычисленій, для сознательнаго рѣшенія уравненій, содержащихъ алгебраическія дроби, такъ и для развитія болѣе широкаго пониманія сущности самой алгебры. Но если задаться цѣлью пройти болѣе или менѣе основательно этотъ отдѣлъ алгебры, то на прохожденіе остальныхъ отдѣловъ программы оказывается весьма мало времени, вслѣдствіе чего приходится переносить на 7-ой классъ все, что касается теоріи квадратнаго корня, квадратнаго уравненія и вообще ирраціональностей, ограничиваясь въ VI классѣ извлеченіемъ квадратнаго корня изъ чиселъ и рѣшеніемъ квадратнаго уравненія безъ изслѣдованій его свойствъ и проч. (выдѣляя точный квадратъ изъ лѣвой части уравненія на численныхъ примѣрахъ). Указанное пере-

несёніе въ настоящее время возможно потому, что въ VII классѣ почти вся программа по алгебрѣ перенесена въ VIII классъ. Но это послѣднее обстоятельство только отчасти облегчаетъ нашу задачу—пройти нѣкоторые отдѣлы алгебры по возможности ранѣе для того, чтобы облегчить рѣшеніе задачъ по геометріи; нельзя не признать, что въ данномъ случаѣ нарушается, какъ и стройность программы, такъ и научность изложенія курса, т. е. получается нѣкоторая скомканность.

Какъ же выйти изъ этого затрудненія?

На этотъ вопросъ можно отвѣтить такъ:—начать изученіе алгебры не съ V класса, а съ IV класса, т. е. на годъ раньше изученія геометріи, какъ дѣлается это въ мужскихъ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ. Нужно сказать, что и въ учебныхъ заведеніяхъ Вѣдом. Имп. Маріи мѣра эта проведена, какъ это видно изъ циркуляра Главноуправляющаго Вѣдомствомъ, если не ошибаюсь, отъ 12 іюня 1911 г., такъ что ученицы IV кл. женскихъ гимназій и институтовъ В. Им. М. съ осени этого года уже приступили къ изученію алгебры.

Замѣчаніе. (IV классъ. Вступленіе. Отрицательныя числа. Алгебраическое сложеніе и вычитаніе.

III кл.—Умноженіе. Рѣшеніе уравненій 1-ой степени.

II кл.—Рѣшеніе уравненій со многими неизвѣстными. Квадратное уравненіе).

Кромѣ того, въ нѣкоторыхъ женскихъ епархіальныхъ училищахъ, въ которыхъ добавлены VII и VIII классы, изученіе алгебры также начинается съ IV кл., какъ, напр., въ Донскомъ епархіальномъ училищѣ.

Такимъ образомъ, очередь осталась за женскими гимназіями Мин. Нар. Просв. Указанное измѣненіе является въ настоящее время необходимымъ еще по слѣдующей причинѣ. Какъ извѣстно, по новымъ правиламъ, которыя въ недалекомъ будущемъ получатъ силу закона, лица женскаго пола, прослушавшія курсъ наукъ въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ и желающія подвергнуться государственнымъ экзаменамъ, обязаны выдержать дополнительныя испытанія при мужскихъ гимназіяхъ по языкамъ—русскому, латинскому и одному изъ новыхъ,—а также по математикѣ и физикѣ по программѣ муж-

скихъ гимназій. По программа по математикѣ въ мужскихъ гимназіяхъ отчасти пополняется въ VIII классѣ женскихъ гимназій на отдѣленіи математики. Но и это пополненіе стоитъ очень большихъ трудовъ, какъ ученицамъ, такъ и преподавателю, и возможно только при хорошемъ составѣ VIII класса (нужно сказать, что во 2-мъ полугодіи изъ числа 6 недѣльныхъ уроковъ около 2-хъ приходится на приготовленіе къ пробнымъ урокамъ, на самые уроки, разборъ и т. п.). Главнымъ затрудненіемъ является именно прохожденіе курса алгебры примѣнительно къ курсу мужскихъ гимназій (курсъ VI и VII классовъ мужскихъ гимназій). Въ случаѣ же перенесенія начала изученія алгебры на IV классъ и сопряженныхъ съ нимъ измѣненій программы алгебры въ остальныхъ классахъ явится возможность возстановить программу VII класса въ прежнемъ видѣ и такимъ образомъ облегчить ученицамъ VIII класса математическаго отдѣленія прохожденіе курса алгебры примѣнительно къ программѣ мужскихъ гимназій.

Итакъ, возвращаясь къ нашей главной цѣли, я отъ имени Новочеркасскаго Математическаго Кружка прошу, въ случаѣ согласія съ сущностью доклада, Первый Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Математики войти съ ходатайствомъ въ Мин. Народн. Просв. сдѣлать слѣдующія временныя измѣненія въ программѣ по алгебрѣ женскихъ гимназій.

Пунктъ I. Начать изученіе алгебры съ IV класса съ такимъ разсчетомъ, чтобы курсъ алгебры въ женскихъ гимназіяхъ соотвѣтствовалъ приблизительно курсу мужскихъ гимназій слѣдующимъ образомъ (въ главныхъ чертахъ):

курсъ	IV	кл.	женск.	гимн.	курсу	III	кл.	мужск.	гимн.
»	V	»	»	»	»	IV	»	»	»
»	VI	»	»	»	»	V	»	»	»
»	VII	»	»	»	»	VI	»	»	»
»	VIII	»	»	»	»	VII	»	»	»

Пунктъ II. Отмѣнить циркуляръ отъ 8 іюня 1900 г. за № 14962, содержаніе котораго слѣдующее:

«исключить о кубическихъ корняхъ, прогрессіяхъ и логариѳмахъ и перенести изученіе этихъ статей въ VIII классъ

и только тѣми ученицами, которыя избираютъ математику главнымъ предметомъ изученія, и сохранить повтореніе ариѳметики».

Пунктъ III. Увеличить число недѣльныхъ уроковъ по математикѣ въ III, IV и V классахъ съ 3-хъ до 4-хъ.

Нѣкоторыя объясненія относительно предлагаемыхъ пунктовъ.

Къ пункту I. 1) *Къ курсу IV класса* по алгебрѣ при 2-хъ урокахъ отнести: предварительныя понятія; отрицательныя числа; четыре дѣйствія съ одночленами; алгебраическія одночленныя дроби; сложеніе, вычитаніе и умноженіе многочленовъ; дѣленіе многочлена на одночленъ; сокращенное умноженіе; рѣшеніе уравненій 1-ой степени съ численными знаменателями.

2) *Къ курсу V класса*: дѣленіе многочленовъ; сокращенное дѣленіе; простѣйшіе случаи разложенія многочленовъ на множители; алгебраическія дроби; рѣшеніе уравненій 1-ой степени въ общемъ видѣ.

3) *Къ курсу VI класса*: остальные пункты программы VI класса, т. е. о корняхъ, извлеченіе квадратнаго корня; квадратное уравненіе; дѣйствія съ радикалами.

4) *Къ курсу VII класса*: всѣ отдѣлы по прежней программѣ.

5) *Курсъ VIII класса*: примѣнительно къ курсу VII класса мужскихъ гимназій.

Къ пункту II. При возстановленіи программы VII класса желательно не вводить статьи объ извлеченіи кубическаго корня изъ чиселъ.

Къ пункту III. Табель уроковъ въ женской гимназіи и мужской гимназіи въ данное время слѣдующій:

I	кл.	жен.	гимн.	3 ур.	пригот.	кл.	мужск.	гимн.—	6	ур.
II	»	»	»	3 »	I	»	»	»	4	»
III	»	»	»	3 »	II	»	»	»	4	»
IV	»	»	»	3 »	III	»	»	»	4	»
V	»	»	»	3 »	IV	»	»	»	4	»
VI	»	»	»	4 »	V	»	»	»	5	»
VII	»	»	»	4 »	VI	»	»	»	4	»
VIII	»	»	»	6 »	VII-VIII	»	»	»	3+3=6	»

Не касаясь числа уроковъ въ первыхъ классахъ, мы видимъ, что въ настоящее время въ 3-мъ классѣ полагается три урока на прохожденіе курса дробей противъ 4-хъ уроковъ II кл. мужскихъ гимназій, а въ IV классѣ три урока на прохожденіе тройныхъ правилъ противъ 2-хъ уроковъ III класса мужскихъ гимназій. Конечно, курсъ дробей проходить при 3-хъ урокахъ труднѣе, чѣмъ при 4-хъ, а потому обычно часть курса дробей переносится на IV классъ, что возможно, въ виду только что сказаннаго (въ IV кл. женск. гимн. на 1 урокъ болѣе, чѣмъ въ III кл. мужск. гимн.).

Перенося начало изученія алгебры на IV классъ, мы должны удѣлить въ IV классѣ 2 часа въ недѣлю на алгебру изъ числа 3 уроковъ. Въ такомъ случаѣ, перенесеніе части курса дробей изъ III класса на IV-ый будетъ невозможно, да и на ариѳметику въ IV классѣ остается всего одинъ часъ въ недѣлю.

Въ виду этого, является необходимымъ увеличить число уроковъ въ III и IV классахъ съ трехъ до четырехъ часовъ въ недѣлю.

Увеличеніе числа уроковъ въ V классѣ не требуетъ объясненія. Возможно ли увеличеніе числа уроковъ? Названное увеличеніе вполнѣ возможно, ибо табель показываетъ, что ни въ одномъ изъ названныхъ классовъ число уроковъ не достигаетъ тридцати, а именно: въ III кл.—27 ур., въ IV кл.—28 и въ V кл.—26 (при слушаніи обоихъ новыхъ языковъ), причемъ число недѣльныхъ часовъ, назначенныхъ на предметы, по которымъ уроки не задаются на домъ, въ III кл.—8 ур., въ IV кл.—8 и въ V кл.—6 (къ этимъ предметамъ относятся: чистописаніе, рисованіе, рукодѣліе, пѣніе, танцы и гимнастика»).

Пренія по докладу Г. П. Кузнецова.

Б. И. Магалифъ (Воронежъ). „Во-первыхъ, слѣдуетъ перенести преподаваніе космографіи въ восьмой классъ, такъ какъ свѣдѣнія по стереометріи, необходимыя для космографіи, не имѣются у учениць седьмого класса, гдѣ только что начинается изученіе стереометріи“.

„Во-вторыхъ, дѣленіе многочлена на многочленъ слѣдуетъ перенести на седьмой классъ при повтореніи алгебры. мѣшать прохожденію курса это не будетъ, а между тѣмъ, полное пониманіе этой статьи чисто алгебраическаго характера возможно только при сравнительно хорошемъ математическомъ развитіи“.

„Въ третьихъ, слѣдуетъ освободить седьмой классъ отъ повторенія ариѳметики. Для дѣйствительно основательнаго повторенія ариѳметики времени нѣтъ, а между тѣмъ отнимается время отъ болѣе основательнаго повторенія алгебры и геометріи и лучшаго усвоенія курса на задачахъ. Ариѳметику (какъ и космографію) слѣдуетъ обязательно перенести въ восьмой классъ для учениць всѣхъ спеціальностей, потому что восьмой классъ даетъ право на учительницу начальной школы“.

И. М. Бѣльтеневъ (Вольмаръ, Лифл. губ.). „Въ женскихъ гимназіяхъ необходимо видоизмѣнить распредѣленіе курса алгебры. Выполнить это можно такимъ образомъ: въ первыхъ трехъ классахъ слѣдуетъ пройти только чисто практическій курсъ ариѳметики и сохранить ея прикладную часть; тогда явится экономія во времени и можно, не увеличивая числа учебныхъ часовъ по ариѳметикѣ, ввести занятіе по алгебрѣ въ четвертомъ классѣ. Распредѣленіе же алгебраическаго матеріала по классамъ нѣтъ надобности строго распредѣлять, такъ какъ это зависитъ отъ метода преподаванія“.

„Въ седьмомъ классѣ вмѣстѣ съ алгеброй слѣдуетъ выяснить нѣкоторыя основныя положенія ариѳметики, чтобы подготовить учениць къ прохожденію методики ариѳметики въ восьмомъ классѣ“.

Е. З. Сокольская (Пенза). „Во-первыхъ, прохожденіе ариѳметики въ седьмомъ классѣ необходимо, такъ какъ не всѣ ученицы идутъ въ восьмой классъ; и желательно вмѣстѣ съ тѣмъ имѣть въ седьмомъ классѣ лишній часъ для ариѳметики. Во-вторыхъ, въ нѣкоторыхъ гимназіяхъ уже и теперь введены въ пятомъ классѣ четыре часа, такъ что къ Рождеству возможно пройти четыре алгебраическихъ дѣйствія; въ пятомъ же классѣ приходится имѣть дѣло съ нулевыми и отрицательными показателями, наконецъ, лишнимъ является перенесеніе дѣленія многочлена на многочленъ въ шестой или седьмой классъ“.

Б. А. Марковичъ (Спб.). „Программы разныхъ отдѣловъ математики не согласованы не только съ космографіей, но и съ физикой. (Приходится въ самомъ началѣ курса физики говорить объ объемахъ и поверхностяхъ многогранниковъ и круглыхъ тѣлъ, и надо было бы дѣлать задачи на измѣреніе объемовъ и поверхностей, а стереометрія проходится лишь въ седьмомъ классѣ). Но даже и между собой программы разныхъ отдѣловъ

математики не согласованы. Напр., мы задаемъ въ пятомъ классѣ геометрическія задачи съ буквенными выраженіями, требующія знанія уравненій, а послѣднія изучаются лишь въ шестомъ классѣ, и часто—во второмъ полугодіи".

„Главное, однако, не въ программахъ, а въ методахъ обученія. Одинъ изъ предыдущихъ ораторовъ указалъ, что слѣдуетъ въ пятомъ классѣ воздержаться отъ дѣленія многочлена на многочленъ; между тѣмъ, слѣдуя установленнымъ методамъ, онъ задаетъ въ томъ же пятомъ классѣ примѣры умноженія и дѣленія сложных одночленовъ съ буквенными и притомъ двучленными показателями".

„Это болѣе трудно и менѣе понятно, чѣмъ дѣленіе многочлена на двучленъ (положительно необходимое для многихъ преобразованій и доказательствъ) и даже на трехчленъ съ несложными коэффиціентами и небольшими числовыми показателями. Другим примѣромъ служатъ наши безполезныя и безсмысленныя задачи коммерческаго характера, притомъ помощью устарѣлыхъ методовъ (пропорціи и др.). Наконецъ, наши ариѳметическія задачи такъ называемаго „алгебраическаго характера", рѣшаемыя безъ помощи уравненій".

„Такимъ образомъ, основной вопросъ не въ перераспредѣленіи учебныхъ часовъ, хотя, конечно, въ частныхъ случаяхъ и это можетъ оказаться полезнымъ, а въ реформѣ преподаванія и всего учебнаго плана".

К. И. Соколовскій (Маріинскъ, Томск. губ.). „Увеличеніе часовъ на алгебру за счетъ ариѳметики путемъ сведенія ея на чисто практическую почву счета не желательно. Да и на прохожденіе ариѳметики-счета понадобится больше времени, чѣмъ на теперешнюю полутеоретическую ариѳметику. Главная же ненормальность постановки преподаванія въ женской гимназіи,—это двоякое требованіе отъ восьмого класса: классъ этотъ долженъ дать ученицамъ и завершеніе общаго средняго образованія, и въ то же время сдѣлать изъ нихъ спеціалистокъ-педагоговъ. Слѣдовало бы либо восьмой классъ оставить общеобразовательнымъ и тогда учредить девятый классъ, спеціально педагогическій, либо параллельно съ восьмымъ классомъ общеобразовательнымъ установить восьмой спеціально-педагогическій. Только послѣ рѣшенія этого вопроса можно обсуждать программы".

А. А. Чебышевъ-Дмитріевъ (Спб.). „Во-первыхъ, временныя мѣры, предлагаемыя докладчикомъ, могутъ быть осуществлены безъ особыхъ постановленій Съѣзда, при добромъ желаніи учащаго персонала, педагогическихъ и попечительныхъ совѣтовъ (примѣръ — Царскосельская ж. г. М. Н. П.). Во-вторыхъ, почти главнымъ и вмѣстѣ съ тѣмъ труднымъ и жгучимъ вопросомъ

является вопросъ о постановкѣ преподаванія въ восьмомъ классѣ,—придать ли этому преподаванію общеобразовательный или педагогическій характеръ"?

М. А. Сахновскій (Черниговъ). „Жизнь показала необходимость широкаго общаго образованія женщинъ, поэтому полумѣры, предлагаемыя Новочеркасскимъ Математическимъ Кружкомъ, должны быть отвергнуты. Съѣзду слѣдовало бы формулировать свою резолюцію въ видѣ желательности полной тождественности программъ женскихъ гимназій съ таковыми же реформированными мужскихъ гимназій".

Р. К. Давидовъ (Кишиневъ). „Мнѣ удалось избѣжать нѣкоторыхъ затрудненій, указанныхъ предыдущими ораторами. Въ пятомъ классѣ до 1-го ноября ведется курсъ алгебры при трехъ часахъ, а послѣ 1-го ноября—курсъ геометріи при двухъ часахъ и алгебры при одномъ. Теорія уравненій проходитъ черезъ весь курсъ пятаго и шестого классовъ. Въ седьмомъ классѣ курсъ космографіи начинается съ описательной части. Въ восьмомъ классѣ въ первомъ полугодіи пять часовъ отдается на теоретическій курсъ и одинъ часъ на методику, а во второмъ полугодіи на методику отходитъ три часа".

А. Л. Остроумова (Тихвинъ, Новгородск. губ.). „Необходимо изученіе методикъ русскаго языка и ариѳметики для всѣхъ кончающихъ гимназію, безъ исключенія, чтобы будущія матери могли умѣло помогать своимъ дѣтямъ въ начальномъ обученіи".

И. М. Бѣльтеневъ (Вольмаръ, Лифлянд. губ.). „О полномъ уравненіи программъ среднихъ мужскихъ и женскихъ учебныхъ заведеній говорить преждевременно, такъ какъ авторитеты по вопросамъ женскаго образованія, напр., Скойтенъ, находятъ, что женское образованіе должно итти особымъ путемъ, сообразно требованіямъ природы женщины".

В. В. Токаревъ (Новомосковскъ, Екатеринослав. губ.). „Во-первыхъ, репетированіе должно исчезнуть изъ обученія,—въ этомъ стремленіе школы,—и этотъ мотивъ разницы женскаго и мужского образованія отпадаетъ. Во-вторыхъ, число уроковъ должно быть увеличено на одинъ часъ въ четвертомъ классѣ и на одинъ въ пятомъ. Въ третьихъ, космографія должна носить только описательный характеръ при настоящемъ математическомъ уровнѣ ученицъ седьмого класса".

І. И. Каширинъ (Ржевъ, Твер. губ.). „Курсъ космографіи долженъ быть пройденъ въ седьмомъ классѣ. Этотъ курсъ расширяетъ воззрѣнія ученицъ на окружающую природу, и лишить этихъ знаній нашихъ ученицъ было бы жестоко. Курсъ Покров-

скаго даетъ ученицамъ полную возможность легко усвоить осно ныя положенія космографіи".

А. Л. Остроумова (Тихвинъ, Новгород. губ.). „Космограф въ седьмомъ классѣ можно преподавать безъ особыхъ математ ческихъ выкладокъ и при этомъ дать ясныя и опредѣленныя п нятія о движеніи солнца, луны и т. д.".

Г. П. Кузнецовъ (Новочеркасскъ). „Временныя мѣропріят предлагаемыя Новочеркасскимъ Математическимъ Кружкомъ, н обходимы; нельзя согласиться съ оппонентомъ, считающимъ э мѣропріятія за полумѣры и требующимъ полной реформы. На с момъ дѣлѣ, предлагаемыя мѣры не терпятъ отлагательства, та какъ уже и теперь многія ученицы теряютъ лишній годъ для пр готовленія къ такъ называемымъ дополнительнымъ при мужских гимназіяхъ испытаніямъ. За эти мѣропріятія говоритъ какъ жизн такъ и возможность немедленнаго ихъ проведенія. Что же касает того, что нѣкоторые шаги въ указанномъ направленіи уже сд ланы въ нѣкоторыхъ частныхъ гимназіяхъ, и поэтому лишним будто бы явится резолюція Съѣзда въ желательномъ для Круж смыслѣ, то противъ этого надо сказать, что измѣненія програм по отдѣльнымъ гимназіямъ встрѣтятъ много препятствій: потр буется солидарность преподавателей математики съ одной сторон педагогическихъ совѣтовъ съ другой; кромѣ того, надо согласіе поп чительныхъ совѣтовъ и разрѣшеніе Попечителя Учебнаго Округа

„Замѣчанія нѣкоторыхъ оппонентовъ выходятъ изъ рамо доклада, изъ этихъ замѣчаній слѣдуетъ отмѣтить учрежденіе вос мого класса съ общеобразовательнымъ характеромъ; но это п требуетъ много времени въ виду законодательнаго характе этого предложенія".

„Остается отвѣтить на отдѣльныя возраженія".

„1) Въ седьмомъ классѣ полагается только повтореніе ари метики, прохожденіе же дополнительныхъ статей обязательно д ученицъ восьмого класса, которыя, какъ будущія домашнія уч тельницы, обязаны пройти ариѳметику по программѣ мужских гимназій. 2) Прохожденіе статьи о дѣленіи многочлена на мног членъ не встрѣчаетъ большихъ затрудненій. 3) При первоначал номъ изученіи алгебры необходимо только понятіе о нулевомъ отрицательномъ показателяхъ; дѣйствія же съ этими и дробным показателями необходимо проходить непосредственно передъ из ченіемъ логариѳмовъ. 4) Успѣшное прохожденіе алгебры, о кото ромъ сообщалось здѣсь, можетъ быть объяснено лишь особен благопріятными условіями, напр., увеличеніемъ числа часовъ, ли исключительною опытностью преподавателя".

Второе засѣданіе.

30 Декабря 8 ч. веч.

III. О результатахъ преподаванія началъ анализа безконечно-малыхъ, аналитической геометріи и теоретической ариѳметики въ реальныхъ училищахъ и въ гимназіяхъ.

Сообщеніе проф. П. А. Некрасова (Спб.).

Докладчикъ сообщилъ, что интересуясь постановкою преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, онъ посѣщалъ въ прошломъ учебномъ году классы Петербургскихъ гимназій и реальныхъ училищъ, гдѣ нынѣ проходятся въ старшихъ классахъ теоретическая ариѳметика и основанія анализа безконечно-малыхъ.

По мнѣнію профессора Некрасова, распоряженіе о введеніи курса теоретической ариѳметики было встрѣчено, какъ въ гимназіяхъ, такъ и въ реальныхъ училищахъ, преподавателями различно. Многіе недоумѣвали, какой матеріалъ долженъ былъ войти въ составъ курса. Курсъ оказался, вообще говоря, скомканнымъ; старались удовлетворить только формальнымъ требованіямъ. Въ одной гимназіи, однако, результаты преподаванія оказались превосходными. Программа, сходная съ той, которую сообщилъ на Съѣздѣ г. Піотровскій, была проведена преподавателемъ (директоромъ гимназіи) систематично и классъ усвоилъ курсъ, при оживленномъ отношеніи учениковъ къ дѣлу. Докладчикъ полагаетъ, что тамъ, гдѣ знаютъ, какъ поставить курсъ теоретической ариѳметики, дѣло можетъ итти; въ противномъ же случаѣ возникновеніе недоразумѣній естественно.

Что касается аналитической геометріи, то здѣсь, по мнѣнію профессора Некрасова, дѣло идетъ успѣшнѣе и этотъ предметъ безъ особыхъ затрудненій является достояніемъ учениковъ.

Относительно преподаванія основаній анализа безконечно-малыхъ, докладчикъ сообщилъ, что въ одномъ реальномъ училищѣ ученики усвоили начала дифференціальнаго исчисленія

и давали хорошіе отвѣты. Преподаватель былъ опытный и сумѣлъ обойти осложненія; опредѣленія давались по существу, элементарныя, краткія, несложныя. Начала же интегральнаго исчисленія давались ученикамъ съ большимъ трудомъ, здѣсь даже опытный преподаватель не могъ почти ничего сдѣлать, при отведенномъ времени на преподаваніе. Можетъ быть это зависѣло отъ новизны дѣла и отъ излишнихъ осложненій, вносимыхъ въ предметъ преподавателями. Со стороны преподавателей иногда прилагалось много усердія, но отвѣты учениковъ были нудные, несвязные. Видно, что ученики думали, старались понять и усвоить, но предметомъ они не овладѣли, когда дѣло касалось усложненныхъ понятій. Дифференцировать сознательно и съ объясненіями ученики всѣхъ реальныхъ училищъ могли.

Въ одномъ изъ московскихъ училищъ, гдѣ докладчикъ наблюдалъ преподаваніе въ концѣ учебнаго года, началъ интегральнаго исчисленія также, какъ оказалось, не успѣли даже коснуться.

По письменнымъ работамъ учениковъ нѣкоторыхъ учебныхъ округовъ, которыя разсматривалъ профессоръ Некрасовъ, онъ затрудняется сдѣлать какой-нибудь опредѣленный выводъ о степени усвоенія матеріала учениками, такъ какъ задачи были очень просты и шаблонны.

Общее заключеніе профессора Некрасова состоитъ въ томъ, что введеніе въ курсъ реальныхъ училищъ началъ анализа безконечно-малыхъ, при наличности опытнаго преподавателя, можетъ внести очень многое въ общее развитіе учащихся и что замѣчающіеся въ настоящее время недочеты, объясняющіеся главнымъ образомъ новизною дѣла, со временемъ сгладятся.

Пренія по сообщенію проф. П. А. Некрасова.

М. Р. Блюменфельдъ (Спб.) сообщилъ Собранію, что въ одномъ изъ петербургскихъ частныхъ реальныхъ училищъ курсъ анализа безконечно-малыхъ проходится въ значительно большемъ объемѣ, чѣмъ это требуется оффиціальными программами 1907 года.

А. Д. Санько (Курскъ). „Курсъ седьмого класса при пяти урокахъ въ недѣлю содержитъ пять отдѣльныхъ предметовъ. Можетъ быть, лучше было бы соединить анализъ и алгебру въ

одинъ курсъ «введеніе въ изчисленіе безконечно-малыхъ». Здѣсь будутъ изложены статьи о предѣлахъ, о функціи, о графикахъ функціи, о видахъ и свойствахъ функціи, въ частности—цѣлой только послѣ этого понятіе о производной (нахожденіе производной отъ функціи одной независимой перемѣнной), теорема Ролля, maxima и minima".

М. Г. Попруженко (Спб.). „Конструкціи курса анализа безконечно-малыхъ могутъ быть различны,—можно его сжать или расширить,—но во всякомъ случаѣ нельзя ограничиться только понятіемъ о производной, а необходимо приложить его къ изслѣдованію хода функціи, къ возрастанію и убыванію ея, къ опредѣленію maximum'a и minimum'a, къ рѣшенію геометрическихъ, механическихъ, физическихъ и иныхъ задачъ. При недостаткѣ времени можно отказаться отъ нѣкоторыхъ теоремъ о предѣлахъ, ограничить область разсматриваемыхъ функцій и, въ крайнемъ случаѣ, отказаться отъ интегральнаго исчисленія".

Л. А. Зборомірскій (Новгородъ). „Программу седьмого класса реальныхъ училищъ желательно сохранить; но при такой программѣ ученики *перегружены*, нѣтъ времени у учениковъ на продумываніе, усвоеніе проходимаго. Необходимъ восьмой классъ, тогда въ седьмомъ классѣ будетъ усвоена аналитическая геометрія, а въ восьмомъ—дифференціальное и интегральное исчисленія".

А. І. Казаровъ (Ейскъ, Кубанск. обл.). „Въ виду недостатка времени для прохожденія анализа можно предложить слѣдующее:

1) Часть курса геометріи, до подобія треугольниковъ, отнести къ четвертому классу. 2) Элементарныя свѣдѣнія по тригонометріи и разсмотрѣніе простѣйшихъ случаевъ рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ проходить въ пятомъ классѣ въ связи съ геометріей. 3) Курсъ тригонометріи заканчивать въ шестомъ классѣ. 4) Такъ какъ неопредѣленныя уравненія требуются впослѣдствіи для «теоріи чиселъ», не изучаемой въ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ, то выключить эти уравненія и отнести теорію общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго къ отдѣлу дробей въ курсѣ алгебры; тогда получится возможность посвятить въ седьмомъ классѣ всѣ пять часовъ аналитической геометріи, изученію свойствъ цѣлой функціи и анализу".

Проф. *П. А. Некрасовъ*. „По наблюденіямъ, сдѣланнымъ въ петербургскихъ учебныхъ заведеніяхъ, понятіе о предѣлѣ и основныя теоремы о предѣлахъ устанавливаются раньше, до седьмого класса, а это даетъ большую экономію во времени. Затѣмъ, какъ въ петербургскихъ гимназіяхъ, такъ и въ реальныхъ училищахъ, понятіе о функціи негласнымъ образомъ уже вошло въ обиходъ. Въ импровизированномъ моемъ докладѣ не было упомянуто о при-

ложеніяхъ производной. Но, конечно, послѣ того, какъ дано понятіе о производной, должны быть пройдены и приложенія ея къ изслѣдованію функцій, maximum'a и minimum'a функціи, а также и приложенія интегральнаго исчисленія къ геометріи. Что касается установленія существованія производной, то здѣсь замѣчено больше всего трудности. Одни преподаватели обходили эту трудность, не вникая глубоко въ суть функціи, не говорили о прерывности и дальше «особыхъ точекъ» не шли. Другіе, наоборотъ, вдавались въ большія тонкости, говорили даже о функціяхъ, не имѣющихъ производной. Въ заключеніе можно утверждать, что экономія, достигнутая надлежащей подготовкой учениковъ въ предыдущихъ классахъ, позволитъ даже при одномъ только часѣ въ седьмомъ классѣ дать закругленный курсъ началъ дифференціальнаго исчисленія, но, конечно, не интегральнаго".

IV. Къ вопросу объ экзаменахъ по математикѣ въ средней школѣ.

Докладъ В. А. Марковича (Спб.).

I.

Письменные экзамены.

Алгебра и ариѳметика. 1) На письменныхъ экзаменахъ русской средней школы *по алгебрѣ* предлагаются одна или двѣ задачи, въ рѣшеніи которыхъ учащіеся должны обнаружить знаніе элементарныхъ преобразованій и достаточный навыкъ въ вычисленіяхъ.

2) Общій характеръ этихъ задачъ—ихъ сложность, громоздкость и совершенно фантастическія комбинаціи математическихъ заданій, которыя не могутъ встрѣтиться ни въ практическихъ примѣненіяхъ, ни на какой-либо послѣдующей ступени теоретическаго обученія математики [1]).

Эти задачи явно распадаются на нѣсколько отдѣльныхъ (3 и больше), а эти, въ свою очередь, — на нѣкоторое число вычисленій; въ общемъ, получается цѣлый рядъ элемен-

---

[1]) Типичные образцы такого рода задачъ можно найти въ сборникѣ Бычкова (напр., Отд. IV, № 1557 и «Смѣшанныя задачи»—Изд. XII) и въ новѣйшемъ сборникѣ Шатова—№№ 475, 491 и др.

тарныхъ преобразованій и вычисленій по заученнымъ формуламъ. Встрѣчающіяся въ этихъ задачахъ уравненія даются готовыми или, вообще, сразу составляются—чисто механически; лишь въ немногихъ сравнительно случаяхъ предлагается составленіе уравненія по сложнымъ и запутаннымъ условіямъ, но всѣ эти «трудныя составленія» сводятся къ немногимъ традиціоннымъ, излюбленнымъ типамъ (бассейнъ, курьеры съ ихъ разновидностями; ученики, ошибающіеся при умноженіи; переливаніе изъ одного сосуда въ другой и пр., и пр.). Поэтому и задачи послѣдней категоріи, вообще, не трудны для учениковъ, получающихъ долгую и спеціальную подготовку къ задачамъ этихъ излюбленныхъ типовъ.

3) Вѣрныя рѣшенія такихъ задачъ свидѣтельствуютъ больше всего объ аккуратности вычисленій (небольшая ошибка, даже описка, въ началѣ рѣшенія часто подрываютъ весь послѣдующій ходъ, чрезвычайно осложняя остальныя вычисленія; иногда такія ошибки приводятъ къ алгебраическимъ формамъ, неразрѣшимымъ средствами элементарной математики,—получается, напр., обыкновенное уравненіе четвертой степени вмѣсто «возвратнаго»).

4) Практика, однако, показываетъ, что средняя быстрота вычисленій и аккуратность въ производствѣ отдѣльныхъ дѣйствій не равнозначны умѣнью вычислять — въ смыслѣ умѣлаго пользованія сокращенными пріемами и выбора наиболѣе выгоднаго сочетанія дѣйствій: вычисленія производятся элементарно и топорно.

5) Такіе результаты совершенно не окупаютъ громадной затраты учебнаго времени, посвящаемаго въ старшихъ классахъ спеціальной, систематической тренировкѣ учениковъ въ задачахъ указаннаго типа.

6) Тѣ же соображенія относятся и къ письменнымъ работамъ по ариометикѣ: въ нихъ еще рѣзче обнаруживается неумѣніе вычислять.

Въ виду этого желательно:

А) Содержаніе письменныхъ работъ раздѣлять на рядъ вопросовъ, задачъ и размѣровъ.

B) Часть матеріала должна быть посвящена вычисленіямъ и преобразованіямъ, но рѣшеніе предлагаемыхъ примѣровъ должно свидѣтельствовать не только о знаніи формулъ и дѣйствій и аккуратности въ ихъ примѣненіи, но также объ умѣлости ученика выбирать наиболѣе выгодныя комбинаціи дѣйствій и пользоваться нѣкоторыми сокращенными пріемами.

C) Остальная часть вопросовъ должна касаться теоріи. обнаружить умѣніе экзаменующагося ясно доказывать отдѣльныя теоремы и послѣдовательно, хотя бы и конспективно, излагать содержаніе различныхъ отдѣловъ (главъ) теоретическаго курса.

D) При этихъ условіяхъ письменная работа можетъ получить преобладающее,—или даже исключительное,—значеніе въ экзаменной аттестаціи.

Геометрія и тригонометрія. 7) Обычныя теперь работы по геометріи и тригонометріи значительно болѣе цѣлесообразны чѣмъ соотвѣтственныя заданія по алгебрѣ; однако, и онѣ не свободны отъ излишней сложности и даже вычурности.

8) Спеціальная подготовка учениковъ къ обычнымъ экзаменаціоннымъ работамъ также отвлекаетъ слишкомъ много учебнаго времени, въ ущербъ болѣе производительной работы учениковъ и преподавателя.

Въ виду этого желательно:

E) Предлагать на письменныхъ экзаменахъ менѣе сложныя заданія; кромѣ задачъ и примѣровъ (тригонометрическихъ) свидѣтельствующихъ о навыкѣ въ преобразованіяхъ и вычисленіяхъ, требовать, хотя и не подробныхъ, но ясныхъ, послѣдовательныхъ отвѣтовъ по вопросамъ теоріи.

II.

Устные экзамены.

9) Не распространяясь объ общеизвѣстныхъ отрицательныхъ сторонахъ устныхъ испытаній, можно согласиться, что при предлагаемомъ характерѣ письменныхъ экзаменовъ устные должны получить второстепенное значеніе.

F) Желательно установить для устныхъ экзаменовъ характеръ бесѣды (коллоквіумъ) по поводу письменной работы [1]).

Пренія по докладу Б. А. Марковича.

К. О. Лебединцевъ (Москва). „Вполнѣ согласенъ со всѣми положеніями докладчика, но нахожу, что предлагаемыя имъ мѣры представляютъ только минимумъ необходимыхъ измѣненій. Дѣло въ томъ, что экзамены не обнаруживаютъ дѣйствительныхъ познаній учащихся по предмету. Всякій педагогъ знаетъ, что экзаменаціонные отвѣты и работы учащихся, даже лучшихъ, нерѣдко оказываются болѣе слабыми, чѣмъ можно было бы ожидать, а темпъ работы у всѣхъ вообще учащихся при экзаменаціонной обстановкѣ замедляется. То же самое подтверждаютъ и экспериментально-психологическія изслѣдованія послѣдняго времени (напр., работы Лобзина). Въ виду этого, дѣйствительную оцѣнку познаній учащихся можно производить только на основаніи ряда самостоятельныхъ работъ учащихся, домашнихъ и классныхъ, распредѣленныхъ въ теченіе всего учебнаго года и поставленныхъ такъ, чтобы онѣ не носили экзаменаціоннаго характера".

З. А. Архимовичъ (Кіевъ). „Вопросъ объ экзаменахъ находится въ зависимости отъ требованій, предъявляемыхъ къ выпускному классу. Прежде задачи для экзаменовъ въ восьмомъ классѣ присылались изъ учебныхъ округовъ, и онѣ отличались громоздкостью. Теперь хотя задачи для экзаменовъ предлагаются преподавателями, но по прежнему рецензированіе работъ производится учебными округами, и гг. рецензенты удовлетворяются только громоздкими задачами, считая, что на такихъ задачахъ испытуемые могутъ показать разностороннее знаніе отдѣловъ математики. Такимъ образомъ, преподаватели поставлены въ необходимость тренировать своихъ учениковъ въ установленномъ направленіи. Отсюда понятенъ спросъ на задачники со сложными громоздкими задачами. Тренировка учениковъ въ умѣніи рѣшать сложныя задачи отнимаетъ много времени и лишаетъ возможности остановиться на интересныхъ дополненіяхъ курса, способствующихъ уясненію и углубленію знаній учениковъ. Отмѣна рецензированія работъ учебными округами явится мѣрой, способствующей повышенію математическаго образованія въ средней школѣ. Наконецъ, слѣдуетъ отмѣтить, что экзаменаціонныя работы большинства

---

[1]) Это можетъ служить не только матеріаломъ для болѣе полной оцѣнки знаній ученика, но и средствомъ обнаружить недобросовѣстность работы, въ случаѣ соотвѣтственныхъ подозрѣній.

учениковъ по совершенно понятнымъ причинамъ значительно ниже ихъ знаній, а потому качество этихъ работъ не можетъ служить вѣрнымъ показателемъ познаній учениковъ и характеристикой постановки преподаванія въ данной школѣ".

С. Я. Гуковъ (Ст. Каменская, Дон. обл.). „Реальныя училища, помимо всего прочаго, должны считаться съ тѣми требованіями, которыя предъявляются къ молодымъ людямъ на конкурсныхъ экзаменахъ въ спеціальныхъ училищахъ".

Б. А. Марковичъ. „Устанавливая согласіе гг. членовъ Съѣзда со всѣми положеніями доклада, отмѣчаю еще разъ создавшееся ненормальное положеніе большинства современныхъ школъ, обратившихся въ школы тренировки. Будемъ надѣяться, что голосъ Съѣзда поможетъ облегчить созданіе лучшей программы и лучшихъ условій для средней школы".

Къ своему докладу Б. А. Марковичъ приложилъ слѣдующій *проектъ* резолюцій по вопросу объ экзаменахъ.

1) Принимая во вниманіе:

a) что задачи, какъ предлагаемыя для письменныхъ работъ на выпускныхъ экзаменахъ средней школы,—особенно по алгебрѣ и ариѳметикѣ,—лишены практическаго смысла и сводятся къ ряду непосредственныхъ вычисленій или къ составленію уравненій небольшого числа шаблонныхъ типовъ;

b) что, несмотря на искусственную сложность такихъ задачъ, онѣ захватываютъ лишь 3 или 4, рѣдко 5 вопросовъ изъ различныхъ отдѣловъ учебнаго предмета и потому не могутъ дать обстоятельной оцѣнки знаній экзаменующагося и степени его математическаго развитія;

c) что, въ виду обязательности такого типа задачъ, преподаватели принуждены терять очень много учебнаго времени въ 7-омъ и особенно въ 8-омъ классахъ для специфическаго подготовленія учениковъ къ требуемымъ вычурнымъ задачамъ, что крайне неблагопріятно отражается на общемъ ходѣ преподаванія,—съѣздъ высказываетъ пожеланіе, чтобы педагогическіе совѣты не были стѣсняемы въ выборѣ темъ для выпускныхъ письменныхъ испытаній какими-либо обязательными шаблонами вродѣ нынѣ предписываемыхъ учебными вѣдомствами.

При этомъ съѣздъ рекомендуетъ педагогическимъ совѣтамъ:

a) *по алгебрѣ*—ставить по нѣсколько отдѣльныхъ вопро-

совъ теоріи и отдѣльныя задачи, требующія умѣлыхъ, характерныхъ, но не продолжительныхъ и притомъ искусственныхъ сложныхъ вычисленій [1]).

b) *по геометріи*—кромѣ задачъ на вычисленіе и притомъ безъ примѣненія тригонометрическихъ и логарифмическихъ вычисленій, ставить теоретическіе вопросы, вродѣ доказательства какой-нибудь основной теоремы или изложенія систематики того или другого отдѣла (филіація теоремъ и слѣдствій).

c) *по тригонометріи*—ставить: 1) одинъ или два теоретическихъ вопроса; 2) несложную планиметрическую задачу съ небольшимъ числомъ логарифмическихъ вычисленій; 3) стереометрическую задачу, требующую примѣненія тригонометрическихъ функцій и преобразованій, но не слишкомъ трудныхъ и сложныхъ.

d) *по ариѳметикѣ*, если только не будутъ измѣнены программы и пока будутъ обязательны выпускныя испытанія по общему курсу ариѳметики,—ставить: 1) примѣры, которые могли бы обнаружить умѣлость и навыкъ въ вычисленіяхъ; 2) задачу, имѣющую фактическій смыслъ, напр., вычисленіе доходности какого-нибудь предпріятія, хотя-бы по многимъ даннымъ, но однороднаго характера, или разсчетъ стоимости себѣ издѣлій въ зависимости отъ реальныхъ факторовъ.

2) Въ частности, относительно ариѳметическихъ задачъ, Съѣздъ высказываетъ пожеланіе, чтобы ученики не были принуждаемы вычислять и разсуждать по устарѣлымъ или элементарнымъ пріемамъ (младшихъ классовъ) и получили право пользоваться могучимъ пособіемъ составленія уравненій и преобразованій, относимыхъ теперь къ курсу алгебры.

3) Принимая во вниманіе, что при указанномъ, болѣе раціональномъ выборѣ темъ для письменныхъ работъ, возможна обстоятельная оцѣнка знаній и развитія ученика, Съѣздъ высказываетъ пожеланіе, чтобы устные экзамены, со всею ихъ неблагопріятною для оцѣнки знаній экзаменующагося обстановкой, были замѣнены устною бесѣдой (colloquium) по поводу ошибокъ поданной работы или въ случаѣ подозрѣнія въ ея несамостоятельности.

---

[1]) Весенній циркуляръ 1912 г. по Мин. Нар. Просв. вполнѣ соотвѣтствуетъ указанному пункту проекта резолюціи. *Прим. ред.*

3-я секція.

Методика математики.

Предсѣдатель секціи: С. И. Шохоръ-Троцкій.

Товарищъ предсѣдателя: В. А. Крогіусъ.

Секретари: А. Е. Дувина, К. И. Зрене, А. Н. Лаврентьева и С. Р. Соколовскій.

Организаціоннымъ Комитетомъ Съѣзда были объявлены въ программѣ Съѣзда слѣдующіе доклады къ заслушанію въ 3-ей секціи:

1) *Д. Д. Галанинъ* (Москва). «Объ измѣненіи метода обученія въ низшей и средней школѣ».

2) *Θ. А. Эрнъ* (Рига). «Спорные вопросы въ современной методикѣ ариѳметики».

3) *К. Θ. Лебединцевъ* (Москва). «Методъ обученія математикѣ въ старой и новой школѣ».

4) *К. Θ. Лебединцевъ* (Москва). «Вопросъ о дробяхъ въ курсѣ ариѳметики».

5) *В. А. Крогіусъ* (Спб.). «Приближенныя и сокращенныя вычисленія».

6) *Д. М. Левитусъ* (Спб.). «Объ алгебраическихъ преобразованіяхъ».

7) *Б. А. Марковичъ* (Спб). «Желательныя измѣненія въ преподаваніи въ средней школѣ теоріи и практики логариѳмовъ».

*8) *В. Р. Мрочекъ* (Спб.). «О функціональности».

*9) *Г. А. Грузинцевъ* (Кологривъ, Костр. губ.). «О преподаваніи тригонометріи».

10) *Д. Э. Теннеръ* (Спб.). «О графическихъ иллюстраціяхъ рѣшеній системы уравненій».

11) *И. М. Травчетовъ* (Спб.). «О первой теоремѣ элементарной геометріи Эвклида».

12) *П. А. Долгушинъ* (Кіевъ). «Неэвклидова геометрія въ средней школѣ».

Докладъ П. А. Долгушина былъ сдѣланъ на общемъ собраніи и помѣщенъ въ I томѣ «Трудовъ» съѣзда.

13) *Е. С. Томашевичъ* (Москва). «Принципъ совмѣстимости плоскихъ и пространственныхъ фигуръ».

14) *Д. М. Левитусъ* (Спб.). «О роли геодезическихъ упражненій при обученіи математикѣ».

15) *С. А. Неаполитанскій* (Варшава). «Элементы логики въ школьной математикѣ».

Сверхъ докладовъ, объявленныхъ въ программѣ Съѣзда, секціей были заслушаны:

1) *Н. П. Поповъ* (Баку). «О лабораторныхъ занятіяхъ по математикѣ въ среднихъ уч. заведеніяхъ Кавказскаго учебнаго округа».

2) *И. И. Александровъ* (Москва). «Построеніе параллелограмовъ».

3) *Л. А. Сельскій* (Варшава). «Вопросъ объ измѣреніяхъ въ системѣ ариѳметики».

Кромѣ общихъ собраній секціи, состоялись два частныхъ совѣщанія, возникшихъ по иниціативѣ нѣкоторыхъ членовъ секціи. Одно изъ нихъ, сначала подъ предсѣдательствомъ С. И. Шохоръ-Троцкаго, а затѣмъ—Н. А. Колубовской, было посвящено вопросу о курсѣ математики въ женскихъ гимназіяхъ; другое, подъ предсѣдательствомъ Ѳ. А. Эрна—вопросу о возможныхъ сокращеніяхъ курса математики въ школѣ. Въ результатѣ перваго изъ этихъ совѣщаній получилось пожеланіе участниковъ его, чтобы курсъ математики въ женскихъ и мужскихъ школахъ былъ одинаковъ. На совѣщаніи подъ предсѣдательствомъ Ѳ. А. Эрна докладчикомъ выступилъ С. И. Шохоръ-Троцкій. Выяснилось, что путемъ перераспредѣленія учебнаго матеріала, перенесенія нѣкоторыхъ статей курса изъ однихъ классовъ въ другіе и путемъ прямого исключенія нѣкоторыхъ ингредіентовъ курса изъ учебныхъ плановъ и программъ, можно достигнуть большого выигрыша времени. Протоколы этихъ частныхъ совѣщаній, за недостаткомъ мѣста, не помѣщаются въ «Трудахъ Съѣзда».

Въ секретаріатъ секціи поступило также заявленіе члена съѣзда Д. П. Цинзерлинга о желательности раздѣленія курса математики на двѣ ступени, отчасти совпавшее съ пожеланіями, выраженными въ нѣкоторыхъ резолюціяхъ Съѣзда.

Первое засѣданіе.

27 декабря 8 ч. веч.

Предсѣдательствовалъ С. И. Шохоръ-Троцкій.

Почетный предсѣдатель—И. И. Александровъ.

Предсѣдатель. «Было время, и это время далеко еще не прошло, когда къ методикѣ математики даже достойные всяческаго уваженія представители математики, какъ науки и учебнаго предмета, относились съ пренебреженіемъ и когда такъ относиться къ этой отрасли дидактики считалось чуть ли не признакомъ наилучшаго тона. Тотъ неожиданный приливъ членовъ этого Съѣзда, котораго свидѣтелями мы являемся въ настоящую минуту, доказываетъ, что методика математики существуетъ, что ея вопросы интересуютъ преподавателей математики въ средней школѣ и что пренебрежительное къ ней отношеніе должно отойти въ область исторіи. Привѣтствую Васъ и въ лицѣ вашемъ—въ высшей степени отрадный фактъ—интересъ стоящихъ у дѣла математическаго образованія къ методикѣ математики».

Послѣ этого заявленія почетнымъ предсѣдателемъ было предоставлено слово для внѣочередного заявленія С. И. Шохоръ-Троцкому.

С. И. Шохоръ-Троцкій (Спб.). «Въ ночь съ 22 на 23 сего декабря мѣсяца, послѣ тяжкой и неизлѣчимой болѣзни, скончался членъ нашего съѣзда Д. В. Ройтманъ, котораго докладъ въ общемъ собраніи 30 декабря долженъ былъ быть посвященъ вопросамъ систематическаго курса геометріи. Д. В. скончался, не достигнувъ сорокалѣтняго возраста. Его перу принадлежитъ много статей и докладовъ разнообразнаго со-

держанія. Имъ составлены также извѣстныя Вамъ книги по геометріи, космографіи и начаткамъ астрономіи. Онъ былъ въ Россіи однимъ изъ самыхъ видныхъ поборниковъ коренной реформы преподаванія математики въ школѣ. Кто видѣлъ Д. В. на собраніяхъ, позналъ его лично, тотъ не могъ думать, что этого сильнаго духомъ борца за реформу математическаго образованія такъ скоро не станетъ. Блестящій и строго-логическій умъ соединялся въ немъ съ основательнымъ философскимъ образованіемъ и какою-то особенною преданностью дѣлу образованія вообще и математическаго—въ частности. Это былъ благородный человѣкъ, честный общественный дѣятель, прилежный и добросовѣстный работникъ, превосходный товарищъ и педагогъ Божьею милостью. Тезисы къ докладу своему на нашъ Съѣздъ онъ написалъ уже лежа, можно сказать, на смертномъ своемъ одрѣ, написалъ карандашемъ, на клочкѣ бумаги. Намъ остается съ благодарностью вспомнить о немъ, помнившемъ о насъ тогда, когда уже дни его были сочтены, со скорбью отмѣтить понесенную русской школою утрату и почтить память покойнаго вставаніемъ».

I. Объ измѣненіи метода обученія въ низшей и средней школѣ.

Докладъ Д. Д. Галанина (Москва).

«Преподаваніе математики въ послѣднее время возбудило много толковъ, главнѣйшей причиной и основнымъ мотивомъ которыхъ было то, что это обученіе отстало отъ общепедагогическихъ идеаловъ, установленныхъ еще Коменскимъ и Песталоцци и блестяще подкрѣпленныхъ и обрисованныхъ работами по экспериментальной психологіи и педагогикѣ Математика не осталась чужда этому движенію, и мы въ настоящее время пользуемся, напримѣръ, геометрическими моделями, чертежами для вырѣзанія и склеиванія геометрическихъ моделей и т. п. Однако, учебные планы перестали удовлетворять педагоговъ и требуютъ реформы. Но реформа возможна только тогда, когда она будетъ построена на пробныхъ курсахъ, изучая которые

мы имѣемъ возможность нѣсколько подойти къ вопросу съ его внутренней психологической стороны. Одни только пожеланія недостаточны. Лишь конкретный курсъ можетъ дать матеріалъ для сужденій, изъ которыхъ можетъ выясниться планъ будущаго метода обученія.

Я различаю два понятія: образованіе и обученіе. Образованіемъ я называю то, что человѣкъ пріобрѣтаетъ самъ, лично, путемъ внутренней психологической и логической обработки даннаго жизненнаго опыта, чтенія книгъ и школьнаго обученія. Обученіемъ я называю тотъ процессъ внѣшняго воздѣйствія на психику человѣка, благодаря которому къ своему личному опыту онъ присоединяетъ опытъ другихъ людей, отчасти усваивая его, отчасти запоминая. Въ образованіи центръ тяжести лежитъ въ мышленіи и творчествѣ, а въ обученіи—въ памяти и усвоеніи. Согласно этому, наилучшимъ путемъ въ обученіи я считаю тотъ, который даетъ матеріалъ для мышленія и творческихъ повтореній, даетъ матеріалъ для созданія идей, а самыя идеи возникаютъ уже непосредственно въ душѣ ребенка путемъ естественной дѣятельности его психическаго аппарата. Путь для такого построенія курса я вижу въ опытѣ ребенка, въ его конкретныхъ чувственныхъ воспріятіяхъ, которыя уже имъ самимъ перерабатываются въ идеи, а эти идеи сами собой перерабатываются въ логическія понятія и сужденія. Съ этой цѣлью я начинаю обученіе съ непосредственнаго опыта ученика въ измѣреніи длинъ, вѣсовъ, объемовъ и т. п., и думаю, что онъ уже самъ изъ моихъ опытовъ получитъ идею числа и функціональной зависимости. Отъ числа онъ перейдетъ къ счету и правиламъ производства вычисленій, а отъ функціональной зависимости—къ идеѣ дѣйствій надъ количествомъ. Въ силу этого, я думаю, что такіе отдѣлы геометріи, какъ равенство треугольниковъ, вычисленіе площадей и объемовъ, измѣреніе длинъ и угловъ должны войти въ курсъ школьнаго обученія, какъ пропедевтическое знаніе первой ступени. Это знаніе не есть абстрактное геометрическое доказательство, а—реальный фактъ, полученный изъ разсмотрѣнія и приготовленія моделей. Ребенокъ, не доказывая равенства треугольниковъ, убѣждается въ немъ, накладывая одинъ вырѣзанный треугольникъ на другой.

Онъ непосредственно убѣждается въ равенствѣ площадей, заполняя площадь фигуры (многоугольника) площадями треугольниковъ и т. п. Изъ такихъ реальныхъ опытовъ онъ изучаетъ свойства плоскихъ фигуръ и ихъ измѣреніе.

Для конкретнаго усвоенія измѣренія площадей я предлагаю особое наглядное пособіе, состоящее изъ листа бумаги, разбитаго дырочками на кв. дюймы или кв. вершки (или, можетъ быть, на кв. сантиметры). Отрѣзывая отъ этого листа площади въ 6, 8, 24 кв. единицы, ученикъ непосредственно сосчитываетъ единицы, а вырѣзывая изъ цвѣтной бумаги равный прямоугольникъ и перегибая его по діагонали, онъ получаетъ понятіе объ измѣреніи площадей треугольниковъ и параллелограмовъ. Площади многоугольниковъ и трапецій разбиваются на площади треугольниковъ. Зная лишь вычисленіе площадей прямоугольниковъ, можно вычислить поверхности призмъ и пирамидъ. Аналогично этому идетъ изученіе измѣренія объемовъ прямыхъ и прямоугольныхъ параллелопипедовъ и проч.

Кромѣ геометріи, въ начальномъ курсѣ я предлагаю отвести большое мѣсто физическимъ измѣреніямъ вѣса и объема, пользуясь вѣсами и мензуркой, и думаю, что эти конкретныя восиріятія дадутъ ребенку идею функціональной зависимости и пропорціональности.

Переходя къ среднему образованію по математикѣ, я не могу согласиться съ раздѣленіемъ его на самостоятельные отдѣлы. Математика въ начальномъ обученіи должна быть слита въ одно цѣлое. Ея цѣлью должно быть не изученіе формальныхъ доказательствъ, а изученіе функціональныхъ зависимостей. Въ настоящее время, число получило слишкомъ доминирующее значеніе въ математическомъ образованіи, а количество (именованное число) настолько находится въ тѣни, что объ его свойствахъ говорятъ только въ прикладныхъ наукахъ и въ геометріи, гдѣ оно продолжаетъ оставаться изолированнымъ и совершенно чуждымъ общему міросозерцанію ученика. Но если измѣреніе должно составить основу начальнаго курса обученія, то свойства количествъ должны быть положены въ основу среднеобразовательнаго

курса. Основнымъ понятіемъ этого изученія будетъ понятіе объ отношеніи и о равенствѣ. Рѣшеніе уравненій и пропорціональность должны лежать въ основѣ второго концентра обученія.

Въ извѣстной мнѣ математической литературѣ я нашелъ только двухъ авторовъ, гдѣ идеѣ пропорціональности количествъ отводится подобающее ей мѣсто, это — въ геометріи Руше и Комберусъ и въ «Ариѳметикѣ» Глаголева. А. Н. Глаголевъ справедливо замѣчаетъ: «свойства чиселъ при извѣстномъ условіи можно примѣнить къ величинамъ: такимъ образомъ числа могутъ служить однимъ изъ средствъ къ изученію величинъ».

При изученіи пропорціональности, по моему мнѣнію, весьма важно выяснить, что пропорціональность количествъ не зависитъ отъ ихъ числового выраженія и есть свойство самихъ количествъ. Для выясненія этого необходимо вновь ввести установленіе пропорціональности, данное Эвклидомъ, и доказать по Эвклиду теорему о пропорціональности отрѣзковъ сторонъ угла при пересѣченіи ихъ параллельными линіями. У Эвклида нѣтъ этого доказательства, у него берутся отдѣльно начерченныя прямыя, тогда какъ въ современномъ курсѣ эта теорема доказывается на основаніи числовой величины отношенія. Доказавъ ее по Эвклиду, я думаю, что весь вопросъ о пропорціональныхъ линіяхъ ставится внѣ вопроса о числовой величинѣ этихъ линій. Геометрія, такимъ образомъ, позволяетъ дать примѣръ пропорціональности независимо отъ чиселъ и доказать эту пропорціональность. По отношенію къ прочимъ величинамъ мы не имѣемъ такого метода и должны довольствоваться ихъ числовымъ представленіемъ. Вотъ почему мы не имѣемъ права отбрасывать наименованіе при вычисленіи и должны вести учетъ какъ числовымъ операціямъ, такъ и наименованіямъ. При этомъ возникаетъ необходимость не только допустить умноженіе именованнаго числа на именованное, но и дать необходимое объясненіе новымъ количествамъ, полученнымъ, какъ результаты умноженія. Эту точку зрѣнія необходимо провести черезъ весь курсъ, старательно отдѣляя операціи числовыя отъ операцій количественныхъ. Я думаю, что

когда эта точка зрѣнія войдетъ въ жизнь и мы привыкнемъ считать, напр., произведенія (20 дней $\times$ 15 рабочихъ) за величину работы, то многіе вопросы будутъ гораздо проще и яснѣе для учениковъ, и для нихъ измѣренія въ физикѣ и механикѣ перестанутъ быть пугаломъ, какъ это наблюдается въ настоящее время. Введеніе этого вопроса въ курсъ нѣсколько рискованно. Я основываюсь здѣсь, кромѣ личныхъ симпатій, на авторитетѣ Вебера и Вельштейна, но думаю, что именно эта сторона вопроса можетъ затемнить болѣе важную идею методической проработки курса начальной алгебры. Лично я не сумѣлъ отказаться отъ введенія новаго метода умноженія, но не увѣренъ вполнѣ въ его безусловной необходимости.

Теперь перехожу къ самой важной части реформы. Въ современномъ курсѣ алгебра оторвана отъ ариѳметики двумя отдѣлами: курсомъ арабскихъ правилъ, именуемыхъ тройнымъ, процентовъ, товарищества и т. д., и введеніемъ преобразованія формулъ раньше рѣшенія уравненій. Что касается до арабскихъ правилъ, то я увѣренъ, что они доживаютъ послѣдніе дни, что не нынче, такъ завтра они будутъ выброшены изъ оффиціальныхъ программъ курса обученія въ средней школѣ. Если этого не случилось до сихъ поръ, то причина заключается въ томъ, что въ этихъ правилахъ есть и цѣнная сторона: изученіе пропорціональности, вопросъ о дѣленіи на неравныя части и вопросъ о процентахъ. Задачи на арабскія правила могутъ быть рѣшаемы при помощи уравненій, причемъ все то цѣнное, что̀ еще держитъ ихъ въ курсѣ средней школы, сохраняется въ силѣ. Такимъ образомъ, если начинать курсъ алгебры съ уравненій, то можно выбросить отдѣлъ, который справедливо и давно уже считается лишнимъ. Но возможно ли начинать курсъ алгебры съ уравненій безъ познаній въ области алгебраическихъ преобразованій?

Обозначивъ неизвѣстное въ данной ариѳметической задачѣ буквой и производя надъ этой буквой рядъ указанныхъ въ задачѣ дѣйствій, мы получаемъ уравненіе, какъ общій способъ рѣшенія ариѳметическихъ задачъ. Этотъ способъ можно связать съ ариѳметикой самымъ разнообразнымъ манеромъ.

Рѣшеніе задачъ на арабскія правила при помощи уравне-

ній даетъ ученику идею количества и въ связи съ этимъ идею функціональной зависимости, которую необходимо иллюстрировать рядомъ примѣровъ на миллиметровой бумагѣ. При построеніи графиковъ ученикъ усвоитъ двѣ идеи: 1) изображеніе количества можетъ быть двоякое: или въ видѣ числа, или въ видѣ отрѣзка прямой; 2) откладывая количества и строя кривую ихъ зависимости, учащійся наглядно видитъ направленіе количествъ, о чемъ и особо идетъ рѣчь при ознакомленіи учащихся съ отрицательнымъ числомъ.

Построеніе функціональной зависимости позволяетъ мнѣ указать на ея простѣйшее выраженіе прямой линіей, связавъ эту прямую съ уравненіемъ. Тогда становится простымъ и нагляднымъ сложное алгебраическое доказательство, что всякое уравненіе 1-ой степени имѣетъ корень и только одинъ.

Познакомившись съ количествами и ихъ функціональной зависимостью, я перехожу къ подробному изученію простѣйшей изъ нихъ, къ пропорціональной зависимости. Я думаю, что соединеніе ученія о пропорціональности и ученія о подобіи треугольниковъ въ одно цѣлое выгодно для того и другого. Для перваго оно дастъ конкретный примѣръ, а для второго— числовое обоснованіе. Мнѣ кажется, что вся трудность ученія о подобіи фигуръ въ 5-омъ классѣ является слѣдствіемъ его оторванности отъ изученія свойствъ пропорціи.

Изучивъ такимъ образомъ не только числовыя, но и количественныя пропорціи, я перехожу къ изученію пропорціональныхъ количествъ. Здѣсь особое значеніе пріобрѣтаетъ понятіе коэффиціента пропорціональности, который существенно отличается отъ того коэффиціента, который дается въ современномъ алгебраическомъ курсѣ. Смѣю думать, что понятіе о коэффиціентѣ, какъ о коэффиціентѣ пропорціональности, важнѣе обычнаго.

Заканчивая этимъ изученіе алгебры въ 3-мъ классѣ, я перехожу въ слѣдующемъ классѣ къ ур-ніямъ съ 2-мя неизвѣстными. При этомъ, пользуясь опытомъ предыдущаго, нахожу совершенно возможнымъ представить общія рѣшенія, какъ координаты точки пересѣченія двухъ прямыхъ.

Потомъ непосредственно можно перейти къ изученію рѣ-

шенія уравненій квадратныхъ и приводимыхъ къ квадратнымъ, познакомивъ съ извлеченіемъ квадратнаго корня.

Закончивши рѣшеніе уравненій, можно съ большей обстоятельностью начать второй концентръ алгебры, гдѣ всѣ дѣйствія надъ алгебраическими количествами должны быть строго и научно обоснованы. Вмѣстѣ съ алгеброй идетъ изученіе геометріи съ подробнымъ доказательствомъ теоремъ, и мнѣ кажется возможнымъ даже излагать какъ Эвклидову, такъ и Неэвклидову геометрію.

Мнѣ кажется, что при такомъ измѣненіи матеріала ученики не только легко воспримутъ курсъ математики, но и усвоятъ его гораздо глубже и гораздо лучше, творя дальнѣйшее на основаніи опыта и конкретныхъ воспріятій. Кто знаетъ, быть можетъ, и типъ ученика, неспособнаго къ изученію математики, сильно измѣнится, если не пропадетъ окончательно».

Тезисы.

1) Обученіе въ низшей школѣ должно быть построено на измѣреніи величинъ. Такое построеніе дѣлаетъ его нагляднымъ, доступнымъ чувственнымъ воспріятіямъ и этимъ приближаетъ къ обученію по другимъ предметамъ.

2) Согласно этому, въ начальный курсъ преподаванія математики должна войти геометрія и простѣйшіе физическіе измѣрительные процессы, и все обученіе сосредоточится не на счетномъ матеріалѣ, а на опытномъ изученіи функціональныхъ соотношеній величинъ.

3) Курсъ обученія въ средней школѣ долженъ непосредственно примыкать къ курсу низшей школы: въ низшей изучается ариѳметика, въ средней—алгебра.

4) Изученіе алгебры должно быть начато съ рѣшенія уравненій, и въ этомъ изученіи должно быть положено въ основу изученіе функціональной зависимости величинъ при помощи алгебраическихъ формулъ.

5) Умноженіе и дѣленіе слѣдуетъ разсматривать, какъ самостоятельныя дѣйствія, дающія новыя количества. Произведеніе линій есть площадь; произведеніе силы на разстояніе—работа и т. п.

Пренія по докладу Д. Д. Галанина.

А. Р. Кулишеръ (Спб.). „Въ заслушанномъ нами докладѣ имѣется рядъ положеній, еще не проникшихъ въ школу, но заслуживающихъ возможно скорѣйшаго введенія въ школьный обиходъ. Ребенокъ живетъ въ мірѣ пространственныхъ образовъ и числовыхъ отношеній. Дать ему возможность изучить эти соотношенія путемъ планомѣрнаго распредѣленія работы—задача школы. Между прочимъ, придется имѣть ввиду выполненіе въ школѣ планомѣрно проведенныхъ измѣреній. Важно также, чтобы ребенокъ неспѣшно изучилъ рядъ числовыхъ соотношеній на конкретномъ матерьялѣ. По словамъ одного изъ новѣйшихъ методологовъ Юнга, мы также пользуемся конкретнымъ. Предоставимъ же ребенку, по крайней мѣрѣ, ту степень удовлетворенія, которая соотвѣтствуетъ его физическому и психическому развитію и которую мы требуемъ для себя самихъ. По вопросу о „тройныхъ правилахъ", несмотря на то, что въ проведеніи этого курса я значительно отступаю отъ общепринятаго раньше порядка, я разойдусь съ докладчикомъ. Надо откинуть, можетъ быть, названіе тройныхъ правилъ, надо выбирать задачи живыя, интересныя. Но не слѣдуетъ отбрасывать способа приведенія къ единицѣ, этого могущественнаго пріема разсужденія, который явится логическимъ элементомъ уже въ курсѣ 3-го класса".

„Далѣе идетъ рѣшеніе тѣхъ же задачъ при помощи пропорцій—орудія болѣе тонкаго. Онѣ, какъ справедливо было указано, могутъ служить переходомъ къ уравненіямъ. И, наконецъ, мы приходимъ къ отношеніямъ. Какъ дать учащемуся почувствовать возможность могущество этого орудія—зависитъ отъ искусства преподавателя. Наконецъ, коснусь вопроса объ умноженіи и дѣленіи именованныхъ чиселъ на именованныя. Изучать эти операціи возможно, но съ большими предосторожностями".

В. М. Куперштейнъ (Елисаветградъ). „Не отвергая пользы измѣреній, я считаю все же необходимымъ на первыхъ порахъ знакомить дѣтей съ числомъ путемъ счета предметовъ, рѣшая съ ними простыя задачи, близкія къ ихъ жизни. Когда дѣти считаютъ: двѣ тетради и три тетради, два яблока и три яблока, двѣ коп. и три коп. и т. п., то у нихъ непремѣнно возникаетъ понятіе о томъ, что 2 да 3—пять. Опасаюсь, что первый тезисъ можетъ ввести учителя въ заблужденіе. Слишкомъ часто изъ-за новаго опускаютъ важное старое. Правъ докладчикъ, утверждая, что мы въ школѣ должны образовывать, а не обучать. Для этого надо дѣтямъ объяснять новое не сразу, а постепенно, маленькими до-

зами, на каждомъ урокѣ выводя неизвѣстное изъ извѣстнаго. Тогда у дѣтей новыя понятія вырастутъ эволюціоннымъ путемъ и это будетъ образованіемъ".

В. Р. Мрочекъ (Спб.). „Здѣсь былъ затронутъ вопросъ о тройныхъ правилахъ и о пресловутомъ приведеніи къ единицѣ. Кругъ примѣненія тройного правила весьма ограниченъ; въ него не входятъ: пропорціональность второго и высшихъ порядковъ, случаи „дробныхъ единицъ" (рабочіе, животныя и пр.) и др. Въ остальныхъ-же случаяхъ, уже весьма немногочисленныхъ, очень часто приходятъ къ абсурдамъ. Это достаточно выяснено Шарлемъ Лезаномъ въ его послѣднемъ сочиненіи. Я могу резюмировать свой взглядъ въ такихъ словахъ: методъ, имѣющій столь малый кругъ примѣненій и даже въ этомъ кругѣ приводящій къ частымъ логическимъ абсурдамъ—скверный методъ!"

А. Г. Пичугинъ (Красноуфимскъ). „Къ тезису второму („все обученіе сосредоточится не на счетномъ матеріалѣ, а"...) дѣлаю слѣдующее замѣчаніе. Я считаю счетъ, притомъ устный, важнымъ какъ въ низшей, такъ и въ средней школѣ, а также въ жизни. По поводу тезиса третьяго („Въ низшей изучается ариѳметика, въ средней—алгебра") скажу: такого дѣленія я предполагаю не дѣлать; лучше слить ариѳметику съ алгеброй. Конецъ ариѳметики есть обобщеніе, въ алгебраической формѣ, дѣйствій ариѳметики. Пропорціи ариѳметики надо отнести къ алгебрѣ въ связи съ пропорціональными линіями въ геометріи. Такимъ образомъ послѣднія послужатъ иллюстраціей къ первымъ. Обобщеніе ариѳметики есть начало алгебры. Засимъ должно итти понятіе о координатахъ и о графикахъ, которыми сопровождается рѣшеніе уравненій".

П. С. Лупаковъ (Одесса). „Не отрицая цѣнности лабораторнаго и экспериментальнаго методовъ изученія пропорціональности величинъ, я нахожу, что этотъ методъ имѣетъ одну опасную сторону. Именно: если ученикъ произведетъ измѣреніе съ достаточной тщательностью, то результаты окажутся не пропорціональны. Пропорціональность можетъ быть обнаружена лишь въ случаѣ грубыхъ методовъ измѣренія, (какъ, напр., была открыта обратная пропорціональность между объемомъ газа и давленіемъ). Если же ученикъ, произведя тщательныя измѣренія, получитъ числа не пропорціональныя и обратится съ недоумѣніемъ къ учителю, то придется отвѣтить, что онъ ошибся и, что результаты должны быть пропорціональны, т. е. сослаться на существующую въ нашемъ умѣ (a priori) идею пропорціональности измѣряемыхъ величинъ. Такимъ образомъ лабораторныя измѣренія служатъ не для открытія закона пропорціональности, даже не для его провѣрки, а лишь для его иллюстраціи".

В. И. Дубравинъ (Псковъ). „Нельзя согласиться съ докладчикомъ, будто изученіе алгебры должно начинаться съ рѣшенія уравненій. Прежде чѣмъ приступить къ рѣшенію уравненія, необходимо пріучить учениковъ пользоваться буквами и производить надъ ними простѣйшія вычисленія. Алгебраическія свѣдѣнія должны сообщаться постепенно и чередоваться съ числовыми примѣрами. Тогда ученики, незамѣтно для самихъ себя, вполнѣ освоятся съ употребленіемъ буквъ для обозначенія количествъ и перестанутъ смотрѣть на букву, какъ на нѣчто непонятное и имъ недоступное. Давая, напр., понятіе о многочленѣ, можно его, съ внѣшней стороны, сопоставить съ многозначнымъ числомъ. Алгебраическія *свѣдѣнія, предлагаемыя въ видѣ обобщенія, оживляютъ* учениковъ и будятъ интересъ къ работѣ. Чтобы отмѣтить аналогію между многочленомъ и десятичнымъ числомъ, цѣлесообразно пріучать учениковъ, при умноженіи многозначныхъ чиселъ, начинать дѣйствіе умноженія съ высшихъ разрядовъ множителя. Изученію рѣшенія ур—ій должно предпослать усвоеніе учащимися пропорціональности величинъ. Что касается рѣшенія задачъ на тройное правило путемъ приведенія къ единицѣ, которое отстаивалъ одинъ изъ ораторовъ, то можно сказать, что этотъ способъ длиненъ и годится только для одного случая. Лучше отнести это правило къ рѣшенію вопроса о прямой и обратной пропорціональности. Слѣдуетъ пріучить учениковъ къ тому, чтобы они выражали зависимость между пропорціональными величинами формулой, каковой и пользовались бы при рѣшеніи задачъ".

А. В. Соболевъ (Рязань) возражаетъ и вооружается противъ самой возможности умноженія одного именованнаго числа на другое и иллюстрируетъ свой взглядъ на вопросахъ объ измѣреніи работы силы, о законѣ Бойля-Маріотта и т. п. Онъ указываетъ на то, что въ этихъ случаяхъ мы дѣйствія производили только надъ отвлеченными числами, а не надъ величинами. Равнымъ образомъ *онъ рѣшительно отказывается говорить* о *раздѣленіи* одного именованнаго числа на другое именованное же число, выраженное въ единицахъ другого рода. Оппонентъ указываетъ также на то, что докладчикъ какъ бы не считаетъ пропорціею равенство отношенія двухъ извѣстныхъ чиселъ отношенію другихъ двухъ извѣстныхъ чиселъ, а говоритъ о пропорціи только какъ объ уравненіи.

С. И. Шохоръ-Троцкій (Спб.). „Въ основѣ только-что сдѣланнаго замѣчанія лежитъ явное недоразумѣніе. Въ наукѣ (въ механикѣ и физикѣ) и въ техникѣ произведенія двухъ и болѣе именованныхъ чиселъ получили права полнаго гражданства. Гельмгольцъ и оба брата Лоджа и всѣ современные физики не задумываются

надъ свободнымъ употребленіемъ подобныхъ произведеній и частныхъ. Все дѣло и весь вопросъ только въ томъ, что́ это *значитъ* помножить длину на длину, площадь на длину, вѣсъ на длину, что́ это значитъ—раздѣлить длину на промежутокъ времени и т. п. Все дѣло въ цѣлесообразномъ опредѣленіи, и если то или другое изъ двухъ дѣйствій полезно, то надо только установить его смыслъ, и тогда никакой опасности для образованія, для логики и для науки не предвидится. Долженъ, однако, отмѣтить, что это—вопросъ, выходящій за предѣлы задачъ нашей секціи, въ которой должны бы обсуждаться вопросы методовъ и пріемовъ обученія, а не вопросъ о дозволительности или недозволительности тѣхъ или иныхъ, важныхъ, съ научной и логической точки зрѣнія, и уже въ наукѣ установленныхъ опредѣленій".

А. И. Лещенко (Кіевъ). „Первоначальное понятіе о числѣ создается лишь путемъ счета однородныхъ предметовъ или путемъ созерцанія количества ихъ въ данной группѣ. Измѣреніе же предполагаетъ уже умѣнье сознательно считать и требуетъ порой много времени для производства самого измѣренія. Въ виду этого, измѣреніе ни въ коемъ случаѣ нельзя признать за раціональный пріемъ на первой ступени ознакомленія учащихся съ числомъ. Приходится присоединиться къ мнѣнію тѣхъ, кто путемъ счета (палочекъ, кубиковъ, карандашей, зеренъ и т. под.) получаетъ одно и тоже число. Что касается дѣйствія умноженія, то придется признать безусловно неумѣстнымъ начинать ознакомленіе съ умноженіемъ съ того случая, когда приходится умножать именованное число на именованное. Считаю правильнымъ тотъ пріемъ, который разсматриваетъ сначала умноженіе, какъ способъ, упрощающій нахожденіе суммы равныхъ слагаемыхъ. Мысли докладчика объ измѣненіяхъ въ преподаваніи алгебры опасны въ особенности тѣмъ, что не устанавливаютъ тѣсной связи между ариѳметикой и алгеброй".

Пр.-доц. *С. О. Шатуновскій* (Одесса) указываетъ на то, что вопросъ объ установленіи или неустановленіи понятія о произведеніи двухъ именованныхъ чиселъ есть вопросъ удобства и цѣлесообразности. Здѣсь нѣтъ императива, заставляющаго или запрещающаго дать то или другое опредѣленіе произведенія двухъ именованныхъ чиселъ. Не только практическія надобности, но часто и теоретическіе интересы побуждаютъ насъ вложить то или другое содержаніе въ терминъ «произведеніе двухъ именованныхъ чиселъ». Въ качествѣ иллюстраціи оппонентъ привелъ такъ наз. «прямую» Гильберта, представляющую собою произведеніе двухъ конечныхъ прямыхъ. Цѣль Гильбертова опредѣленія произведенія двухъ отрѣзковъ—развитіе ученія о подобіи независимо отъ ученія о

безконечно-маломъ. Оппонентъ защищаетъ право перемножать какія угодно величины, лишь бы было дано опредѣленіе этого умноженія и лишь бы оно было цѣлесообразно.

Л. А. Сельскій (Варшава). „Я коснусь только пятаго тезиса. Умноженіе и дѣленіе всегда выражаютъ зависимость между величинами, лежащую, такъ сказать, въ самой ихъ природѣ. Напр., *можно дѣлить яблоки на кучи, мальчиковъ на классы*, массы на объемы, километры на путевые часы; мы выражаемъ распредѣленіе однихъ атрибутовъ предметовъ между другими".

„Отношеніе величинъ (вида $\frac{M}{N}$) выражаетъ зависимость между ними. Если вѣсъ въ 8 килограммовъ относится къ объему въ 4 куб. децим., то

$$\frac{8 \text{ кгр.}}{4 \text{ куб. дцм.}} = \frac{2 \text{ кгр.}}{1 \text{ куб. дцм.}}$$

Получается крайне наглядная картина взаимоотношенія величинъ. Въ случаѣ же, такъ наз., отвлеченнаго дѣленія мы приходимъ къ странному окончанію процесса:

$$\frac{2 \text{ кгр.}}{1}$$

два килограмма дѣленные на одну часть, что невозможно: на одну часть дѣлить нельзя".

„Взаимная зависимость величинъ, которая рисуется отношеніемъ величинъ, *крайне близка пониманію дѣтей:* они постоянно пишутъ дѣлителя—именованнымъ. Докладчикъ предлагаетъ чрезвычайно продуктивный для школы пріемъ. Высказанное здѣсь мнѣніе, будто измѣреніями могутъ быть затушеваны чисто числовыя представленія, совершенно невѣрно, такъ какъ измѣренія всегда ведутъ къ созданію множественнаго, т. е. числового представленія".

Предсѣдатель секціи *С. И. Шохоръ-Троцкій* въ своемъ резюме доклада Д. Д. Галанина и преній указываетъ, что многіе боятся *увлеченія* измѣреніемъ и что выяснились разногласія по вопросу о возникновеніи понятій счета, числа и измѣренія. Игнорировать измѣреніе *столь же невозможно и* нецѣлесообразно, какъ строить понятіе о числѣ безъ счета. Безъ счета нѣтъ числа въ полномъ смыслѣ этого послѣдняго слова, но это не исключаетъ чрезвычайной педагогической важности упражненій въ измѣреніи при обученіи ариѳметикѣ.

II. Начала логики въ курсѣ школьной геометріи.

Докладъ С. А. Неаполитанскаго (Варшава).

«При разсмотрѣніи новыхъ программъ математики, при чтеніи статей о реформѣ преподаванія математики мнѣ ни разу не приходилось встрѣчаться съ мыслью о необходимости ввести въ программу геометріи, въ качествѣ пропедевтическаго матеріала, знакомство учениковъ съ элементами логики. Между тѣмъ, по моему крайнему разумѣнію, краткій курсъ логики, курсъ, конечно, наглядный и разсчитанный на полное пониманіе и интересъ со стороны учащихся весьма цѣлесообразенъ и даже необходимъ для успѣшнаго усвоенія математики вообще и началъ дедуктивной геометріи въ особенности. Поэтому, цѣлью настоящаго доклада служитъ: во 1-хъ, выясненіе необходимости введенія въ программу школьной математики знакомства учениковъ съ началами логики, какъ пропедевтическаго курса къ изученію дедуктивной геометріи и, во 2-хъ, выясненіе характера и содержанія этого курса.

Къ моей радости, первая задача весьма мнѣ облегчена докладами проф. А. В. Васильева и С. А. Богомолова. Что знакомить учениковъ среднихъ классовъ средней школы съ элементами логики цѣлесообразно, въ этомъ едва ли кто нибудь будетъ сомнѣваться. Дѣйствительно, возрастъ ученика IV класса въ смыслѣ умственнаго развитія является критическимъ: къ это время у него формируется способность къ отвлеченному мышленію, является напряженная любознательность и стремленіе оформить, осмыслить и обосновать свои знанія. Съ этой точки зрѣнія краткій курсъ логики явится не только пропедевтическимъ для изученія дедуктивной геометріи, но и курсомъ, завершающимъ первый циклъ средняго образованія вообще.

Спросите ученика VII класса, почему неправильно опредѣленіе: параллелограмъ есть четыреугольникъ, въ которомъ противуположныя стороны параллельны и діагонали въ точкѣ пересѣченія дѣлятся пополамъ? Въ лучшемъ случаѣ естественная логика подскажетъ ему, что послѣдній признакъ лишній.

Но почему онъ является лишнимъ, гдѣ базисъ этого утвер-жденія—онъ не скажетъ ибо базисомъ служитъ извѣстное логическое правило, а его—то онъ и не знаетъ. Между тѣмъ, почти все среднее образованіе и общее, и математическое—проходится теперь безъ логическаго освѣщенія.

Необходимость началъ логики, какъ пропедевтическаго курса къ изученію дедуктивной геометріи, будетъ еще яснѣе, если мы на минуту представимъ себѣ положеніе учителя и ученика, начинающихъ одинъ—обучать, а другой—обучаться геометріи. Дедуктивная геометрія имѣетъ дѣло съ идеальными понятіями, смыслъ и содержаніе которыхъ учитель обязанъ выяснить ученикамъ. Я спрашиваю, въ силахъ ли учитель сдѣлать это выясненіе, если ученикъ не имѣетъ яснаго и отчетливаго сознанія о томъ, что̀ такое понятіе вообще.

Далѣе, извѣстно, какую важную роль въ дѣлѣ успѣшнаго изученія математики имѣютъ точныя и хорошо составленныя опредѣленія. И мы даемъ такія опредѣленія, а ученики ихъ выучиваютъ наизусть.

Выяснивъ ученикамъ геометрическія понятія и подчеркнувъ при этомъ, что геометрическихъ прямыхъ, плоскостей, квадратовъ и т. п. не существуетъ реально, мы начинаемъ фаршировать учениковъ различными теоремами, доказывая ихъ преимущественно дедуктивнымъ путемъ. И отсюда начинается истинная драма и для учениковъ, и для учителя. Во 1-хъ, у всякаго, болѣе или менѣе любознательнаго ученика явится вопросъ о цѣлесообразности геометріи,—вопросъ о томъ, зачѣмъ существуетъ наука, объектомъ которой служитъ то, что не существуетъ. Однажды ученикъ, помню, при теоремѣ о биссектриссѣ равнобедреннаго треугольника спросилъ меня: зачѣмъ намъ эта теорема, вѣдь равнобедреннаго треугольника все равно не существуетъ? Я, признаться, оказался въ пренепріятномъ положеніи: я долженъ былъ или отдѣлаться какимъ нибудь банальнымъ отвѣтомъ, или выяснить ученику цѣль и значеніе абстрактныхъ наукъ вообще и геометріи въ частности. Первый отвѣтъ, понятно, не достоенъ учителя, второй же предполагаетъ предварительное сообщеніе тѣхъ свѣдѣній, о которыхъ идетъ рѣчь.

Драма заключается и въ томъ, что ученики на первыхъ порахъ никакъ не могутъ осмыслить и понять предлагаемыхъ доказательствъ.

И это вполнѣ понятно. Ученики просто не знаютъ, чего отъ нихъ требуютъ. Они только знаютъ, что нужно что—то говорить, чтобы договориться до излюбленной фразы: «что́ и требовалось доказать». И дѣло здѣсь не въ томъ, что доказательства сами по себѣ непонятны ученикамъ, а въ томъ, что знакомятся-то они съ доказательствами на матеріалѣ, который очень далекъ отъ міра ихъ постоянныхъ представленій и умственныхъ переживаній. Выводъ напрашивается самъ собой: нужно предварительно на примѣрахъ, доступныхъ ученикамъ, выяснить, что такое доказательство и каковы его виды.

Даже при существованіи курса наглядной геометріи, по моему мнѣнію, знакомство учениковъ съ элементами логики является далеко не излишнимъ. Въ самомъ дѣлѣ: какова бы ни была программа наглядной геометріи, она всегда останется эмпирической и, слѣдовательно, индуктивной. Она не научитъ учениковъ составленію правильныхъ опредѣленій, не выяснитъ характера абстрактной науки, не дастъ образцовъ анализа и синтеза, такъ что переходъ отъ геометріи наглядной къ дедуктивной безъ связующаго ихъ звена—курса логики, будетъ скачкомъ.

По моему убѣжденію, нормальная программа геометріи въ средней школѣ должна быть такова: 1) наглядная геометрія; 2) знакомство учениковъ съ элементами логики, какъ введеніе въ дедуктивную геометрію; 3) геометрія дедуктивная.

Программа предлагаемаго мною курса логики слѣдующая:

Сложное представленіе, какъ умственный образъ предмета, возникающій благодаря памяти.—Признаки предмета существенные и случайные.—Простое представленіе.—Понятіе, какъ общее представленіе.—Процессъ образованія понятій. (Замѣчаніе. При выясненіи послѣдняго желательно обратить вниманіе учениковъ на то, что понятіе существуетъ лишь, какъ умственное построеніе, но реальнаго существованія не имѣетъ, т.-е. выяснить, что реально существуетъ вотъ это животное, вотъ этотъ человѣкъ, но нѣтъ реальнаго образа, соотвѣтствующаго

словамъ: животное, человѣкъ, подобно тому, какъ нѣтъ лица, соотвѣтствующаго портрету, полученному при помощи составной фотографіи Гальтона).—Дѣленіе понятій на абстрактныя и конкретныя.—Признаки понятій.—Родъ, видъ, выводной и случайный признаки.—Объемъ и содержаніе понятія.—Зависимость между содержаніемъ понятія и его объемомъ.—Опредѣленіе, какъ перечисленіе признаковъ понятія.—Неопредѣленныя или простыя понятія. Способъ составленія опредѣленія.—Требованіе логическаго опредѣленія: соразмѣрность, ясность, положительность, отсутствіе «круга».—Выясненіе и опредѣленіе геометрическихъ понятій.—Геометрическое тѣло, поверхность, линія, точка, прямая, плоскость.—Сужденіе или предложеніе, какъ соединеніе двухъ или нѣсколькихъ понятій или представленій на основаніи увѣренности, что утверждаемая связь соотвѣтствуетъ дѣйствительности.—Подлежащее и сказуемое.—Сужденія общія и частныя, утвердительныя и отрицательныя.—Сужденія категорическія, условныя и раздѣлительныя.—Законы мышленія.—Умозаключеніе, какъ способъ изъ двухъ или нѣсколькихъ сужденій выводить новое сужденіе одинаковой достовѣрности съ данными.—Посылки.—Тезисъ.—Непосредственное умозаключеніе.—Силлогизмъ.—Аксіома силлогизма.—Примѣры силлогизма.—Выводъ изъ условныхъ и раздѣлительныхъ сужденій.—Сокращенные силлогизмы.—Индукція, какъ заключеніе отъ частнаго къ общему.—Доказательство.—Виды доказательства: анализъ, синтезъ и доказательство отъ противнаго.—Аксіома.—Теорема.—Составъ и виды теоремъ.—Наука, какъ совокупность знаній о данномъ предметѣ, расположенныхъ по опредѣленному плану для лучшаго ихъ пониманія и усвоенія.—Науки конкретныя и абстрактныя.—Ихъ различіе.—Значеніе и цѣль абстрактныхъ наукъ.—Цѣль, значеніе и содержаніе геометріи, какъ абстрактной науки.

Изложенный матеріалъ предлагается ученикамъ въ формѣ бесѣдъ съ цѣлымъ классомъ. Вызываніе учениковъ, отмѣтки и задаваніе уроковъ на-домъ должно быть устранено. Опредѣленія выводятся индуктивнымъ путемъ изъ конкретныхъ примѣровъ, а гдѣ можно —и изъ математики. Заботы учителя должны быть направлены не столько на формальное усвоеніе

бесѣдъ, сколько на ихъ пониманіе, и цѣль бесѣдъ можно считать достигнутой, если ученики будутъ въ состояніи привести правильные примѣры на выясненныя положенія. Матеріалъ расчитанъ на 8—10 учебныхъ часовъ.

Если разсматривать предложенный курсъ какъ пропедевтическій, вводящій въ изученіе геометріи, то при прохожденіи его необходимо обратить вниманіе на два момента: на выясненіе видовъ доказательствъ и на выясненіе смысла и цѣли изученія геометріи, какъ абстрактной науки.

Для ознакомленія учениковъ съ синтезомъ и анализомъ мы разсматривали классическій примѣръ: пусть господинъ M хочетъ доказать, что онъ происходитъ отъ родоначальника A. Извѣстно, что путь отъ родоначальника A къ M въ нисходящей линіи будетъ путь синтеза, а обратный путь отъ M къ A въ восходящей линіи—путь анализа.

На этомъ примѣрѣ ученикъ убѣждался въ особенностяхъ синтеза и анализа.

Для ознакомленія съ доказательствами отъ противнаго брался примѣръ вродѣ слѣдующаго. Въ извѣстномъ городѣ въ извѣстное время совершена кража вещи, о которой знаютъ только три лица A, B, C. Какъ доказать, что кражу совершилъ C? Для этой же цѣли служили ариѳметическія задачи, изъ рѣшенія которыхъ ученики могли усмотрѣть выводы аналитическаго метода и значеніе синтетическаго.

Приступая къ выясненію смысла и значенія дедуктивной геометріи, я сравненіемъ наукъ—географіи и исторіи съ науками естествовѣдѣніемъ и ариѳметикой устанавливаю характеристическую особенность абстрактной науки, какъ науки о томъ, какимъ долженъ быть предметъ, какъ науки о типахъ, образцахъ и нормахъ, съ которыми сравниваются реальные предметы и ихъ свойства. Затѣмъ примѣрами, взятыми изъ дѣтской жизни, выясняю, какую пользу получаетъ человѣкъ отъ изученія абстрактной науки.

Геометрія—наука абстрактная, а значитъ цѣль и значеніе ея объясняются цѣлью и значеніемъ абстрактныхъ наукъ вообще. Прямой линіи не существуетъ,—это вѣрно, но зато существуетъ много тѣлъ, которые ограничены линіями, очень

похожими на прямыя. Геометрія какъ бы говоритъ изучающему ее: «вотъ тебѣ образцовыя фигуры и ихъ свойства. Смотри, на какую изъ изученныхъ тобою фигуръ болѣе всего похожа та, свойства которой тебя интересуютъ? Если она похожа, напр., на кругъ, то примѣни къ ней свойства круга въ полной увѣренности, что свойства круга къ ней будутъ примѣнимы тѣмъ вѣрнѣе, чѣмъ больше на кругъ она похожа.

Послѣ намѣченнаго въ общихъ чертахъ логическаго введенія можно безбоязненно отправиться въ путь изслѣдованія геометрическихъ истинъ, въ полной увѣренности, что немалый трудъ, затраченный преподавателемъ на это введеніе, принесетъ обильные плоды».

III. Методъ обученія математикѣ въ старой и новой школѣ.

Докладъ К. Θ. Лебединцева (Москва).

(См. «Математическое Образованіе», 1911 г., № 1, и 1912 г., № 2).

Тезисы.

1) Традиціонный абстрактно-дедуктивный методъ обученія математикѣ является недостаточно обоснованнымъ психологически и на практикѣ встрѣчается съ серьезными препятствіями.

2) Поиски новаго метода должны привести не къ конфликту, а къ синтезу научно-математической и педагогической точекъ зрѣнія.

3) Въ учебномъ предметѣ нельзя утверждать чего-либо противорѣчащаго научнымъ даннымъ, нельзя и пользоваться такими способами объясненій, которые содержатъ логическій дефектъ; въ соблюденіи этихъ условій и заключается научность курсовъ, преподаваемыхъ въ средней школѣ.

4) Въ учебномъ предметѣ можно и должно, въ случаѣ надобности, вмѣсто дедуктивнаго доказательства той или иной математической истины заставлять учащихся убѣждаться въ справедливости ея индуктивнымъ путемъ, на цѣлесообразно

подобранныхъ конкретныхъ примѣрахъ; можно и должно, въ подходящихъ случаяхъ, сообщать неполныя опредѣленія, съ тѣмъ, чтобы впослѣдствіи ихъ расширять. Такова педагогическая точка зрѣнія.

5) Методъ преподаванія математики въ теченіе курса средней школы долженъ постепенно видоизмѣняться сообразно развитію логическихъ способностей учащихся, и въ этомъ развитіи можно намѣтить три цикла:

6) Первый циклъ соотвѣтствуетъ отроческому возрасту учащихся 10—13 л. (когда изучается ариѳметика, начальныя свѣдѣнія по алгебрѣ и, согласно современнымъ воззрѣніямъ, такъ назыв. конкретная геометрія). На этой ступени усвоеніе новыхъ понятій и истинъ должно итти исключительно конкретно-индуктивнымъ путемъ, съ широкимъ примѣненіемъ такъ назыв. лабораторныхъ пріемовъ.

7) Второй циклъ соотвѣтствуетъ переходному возрасту 13—16 л. (въ которомъ изучается основной курсъ алгебры и такъ назыв. систематическій курсъ геометріи со включеніемъ началъ тригонометріи). На этой, именно, ступени должно начаться развитіе дедуктивныхъ пріемовъ усвоенія новыхъ истинъ, наряду съ индуктивными, и должны быть, насколько можно, приведены въ логическую связь между собою важнѣйшія истины, изученныя до сихъ поръ чисто эмпирически.

8) Третій циклъ соотвѣтствуетъ юношескому возрасту 16—18 л. (когда должны, согласно современнымъ воззрѣніямъ, изучаться основы высшаго анализа и должно идти систематизирующее и обобщающее повтореніе основъ всего курса математики). Здѣсь дедуктивные пріемы должны получить полное свое развитіе, не вытѣсняя, впрочемъ, конкретно-индуктивнаго метода при изложеніи существенно новыхъ истинъ.

9) На всѣхъ ступеняхъ обученія должно быть обращено вниманіе на установленіе тѣсной связи между различными отдѣлами математики между собою и съ другими науками, а характеръ практическихъ упражненій долженъ быть близокъ къ окружающей дѣйствительности.

Второе засѣданіе

28 декабря 8 час. веч.

Предсѣдательствовалъ П. А. Долгушинъ.

Вопросъ о дробяхъ въ курсѣ ариѳметики.

(Основныя положенія методики курса дробей).

Докладъ К. Ѳ. Лебединцева (Москва).

«Ученіе о дробяхъ принадлежитъ, какъ извѣстно, къ числу больныхъ мѣстъ традиціонной системы преподаванія ариѳметики. Болѣе сложные отдѣлы курса, какъ, напр., умноженіе и дѣленіе на дробь, обычно съ трудомъ усваиваются учащимися, а такой сравнительно легкій отдѣлъ, какъ дѣйствія надъ десятичными дробями, служитъ постояннымъ источникомъ ошибокъ въ вычисленіяхъ, порою даже въ старшихъ классахъ. Причины этого явленія общеизвѣстны. Съ одной стороны, традиціонный курсъ дробей вообще излагается въ слишкомъ отвлеченной формѣ; съ другой стороны, при прохожденіи его обыкновенно слишкомъ много вниманія удѣляется второстепеннымъ вопросамъ, лишь косвенно связаннымъ съ ученіемъ о дробяхъ и не имѣющимъ серьезнаго практическаго значенія,—напр., вопросу о дѣлимости чиселъ или о періодическихъ дробяхъ,— а на пріобрѣтеніе прочныхъ навыковъ въ дѣйствіяхъ надъ дробями, встрѣчающимися въ ариѳметической практикѣ, остается недостаточно мѣста и времени; объ устномъ же счетѣ надъ простѣйшими дробями или о примѣненіи въ частныхъ случаяхъ болѣе удобныхъ и изящныхъ пріемовъ вычисленія — школа обыкновенно и не помышляетъ.

Очевидная ненормальность такого положенія заставляетъ поставить вопросъ о томъ, каково же должно быть содержаніе

ученія о дробяхъ въ курсѣ ариѳметики и какъ должны разрабатываться съ учащимися важнѣйшіе пункты этого ученія. Я и имѣю въ виду дать посильный отвѣтъ на этотъ вопросъ.

Съ этой цѣлью я остановлюсь прежде всего на самомъ спорномъ въ настоящее время пунктѣ методики ученія о дробяхъ—на вопросѣ объ относительномъ порядкѣ изученія дробей, простыхъ и десятичныхъ. Должны ли десятичныя дроби изучаться, какъ частный случай обыкновенныхъ, или предшествовать имъ, подъ псевдонимомъ «десятичныхъ чиселъ» или подъ своимъ настоящимъ именемъ?

Старая школа, какъ извѣстно, рѣшала этотъ вопросъ весьма просто: сперва должны изучаться общія положенія и общіе законы, а затѣмъ тѣ формы, въ которыя они облекаются въ частныхъ случаяхъ; поэтому десятичныя дроби должны идти вслѣдъ за обыкновенными. Нельзя сказать при этомъ, чтобы въ традиціонной практикѣ строго выдерживалась система—разсматривать десятичную дробь, какъ частный случай простой; напр., какъ извѣстно, правило умноженія десятичныхъ дробей чаще всего выводилось при помощи отбрасыванія запятыхъ у сомножителей и примѣненія законовъ объ измѣненіи произведенія, а не какъ частный случай правила умноженія простыхъ дробей. Но, въ общемъ, указанное распредѣленіе курса вполнѣ отвѣчало абстрактнодедуктивному методу обученія математикѣ, принятому въ старой школѣ.

Въ сочиненіяхъ сторонниковъ реформы*), да и въ практикѣ школъ новаго типа замѣчается опредѣленная тенденція предпосылать изученіе десятичныхъ дробей простымъ и ставить десятичныя дроби въ соотвѣтствіе скорѣе съ цѣлыми числами, чѣмъ съ обыкновенными дробями. Вмѣстѣ съ тѣмъ наблюдается также стремленіе ограничить изученіе простыхъ дробей, даже раздаются голоса, требующіе изъятія курса простыхъ дробей изъ школы.

Въ пользу предварительнаго изученія десятичныхъ дробей приводится обыкновенно то соображеніе, что дѣйствія надъ

*) Al. Höfler. Didaktik des mathematischen Unterrichts.
В. Мрочекъ и Ф. Филипповичъ. Педагогика математики, т. I.
Ивановъ (Дубравинъ). Курсъ ариѳметики, вып. I.

десятичными дробями проще соотвѣтственныхъ дѣйствій надъ простыми дробями и что предварительное ознакомленіе съ ними отвѣчаетъ требованіямъ индуктивнаго метода въ обученіи. Кромѣ того, говорятъ, что правила дѣйствій надъ десятичными дробями аналогичны таковымъ же правиламъ для цѣлыхъ чиселъ, что сами по себѣ десятичныя дроби представляютъ естественное развитіе нумераціи вправо, а потому и цѣлесообразно сопоставлять ихъ именно съ цѣлыми числами, а не съ дробями вообще. Наконецъ, указываютъ, что десятичныя дроби имѣютъ гораздо большее практическое значеніе, чѣмъ простыя, что послѣднія мало или вовсе не встрѣчаются въ практическихъ вычисленіяхъ и что поэтому школа и должна пораньше знакомить учащихся съ десятичными дробями и главное свое вниманіе удѣлять изученію точныхъ и приближенныхъ вычисленій съ ними, а простымъ дробямъ посвящать время лишь постольку, поскольку въ частныхъ случаяхъ онѣ могутъ способствовать сокращенію вычисленій.

При этомъ сторонники предварительнаго изученія десятичныхъ дробей обыкновенно предлагаютъ при прохожденіи дѣйствій надъ ними, въ частности—умноженія и дѣленія на десятичную дробь, не касаться вопроса о сущности этихъ дѣйствій и ссылаться при отбрасываніи запятой въ множителѣ и дѣлителѣ на законы измѣненія произведенія и частнаго, установленные для цѣлыхъ чиселъ. Не отрицая логическихъ дефектовъ, допускаемыхъ при такомъ способѣ объясненія*), они готовы мириться съ этими дефектами въ виду незамѣтности послѣднихъ для учащихся и ради тѣхъ внѣшнихъ удобствъ, которыя проистекаютъ изъ принятаго ими расположенія курса. Однимъ словомъ, какъ имъ кажется, они отдаютъ предпочтеніе дидактическимъ и педагогическимъ соображеніямъ передъ чисто-логическими.

Я полагаю, однако, что отрицательныя стороны такой постановки вопроса болѣе серьезны, чѣмъ это кажется на первый взглядъ. Уже то обстоятельство, что учащіеся будутъ употреблять хорошо знакомый имъ терминъ «умножить» въ при-

*) См., напр., вышеупомянутое сочиненіе Höfler'а, стр. 82.

ложенія къ такимъ случаямъ, когда этотъ терминъ будетъ имѣть уже нѣсколько иной смыслъ, и притомъ этотъ новый смыслъ не будетъ имъ выясненъ,—уже это одно обстоятельство нужно считать непріемлемымъ съ педагогической точки зрѣнія. А сверхъ того, если мы, умножая какое-либо число, хотя-бы на 0,3, говоримъ, что при отбрасываніи запятой во множителѣ искомое произведеніе увеличивается въ 10 разъ, то мы, не имѣя логическаго права распространять на сферу дробныхъ чиселъ тотъ законъ, который установленъ нами пока лишь для цѣлыхъ чиселъ, вводимъ въ скрытомъ видѣ опредѣленіе смысла умноженія на 0,3, то самое опредѣленіе, котораго хотѣли избѣжать. Мы, въ сущности, говоримъ: «подъ произведеніемъ даннаго множимаго на 0,3 мы будемъ разумѣть такое число, которое въ 10 разъ меньше произведенія того же множимаго на 3», только этому новому опредѣленію мы придаемъ такую форму, которая имѣетъ внѣшній видъ логическаго доказательства. А такой пріемъ, какъ извѣстно, стоитъ въ коренномъ противорѣчіи съ требованіями современной дидактики. А если еще принять въ соображеніе, что чисто внѣшнее изученіе правилъ умноженія и дѣленія на десятичную дробь не можетъ обезпечить должной увѣренности при производствѣ учащимися этихъ дѣйствій въ задачахъ, то придется въ концѣ концовъ признать, что ни логическія, ни педагогическія соображенія не оправдываютъ такого способа прохожденія курса «десятичныхъ чиселъ», который обыкновенно предлагается.

Можно было бы признать непротиворѣчащимъ дидактическимъ требованіямъ только такое предварительное прохожденіе курса десятичныхъ дробей, при которомъ смыслъ дѣйствій надъ ними не замалчивался бы, и умноженіе на дробь опредѣлялось бы хотя бы, какъ повтореніе слагаемымъ нѣкоторой десятичной доли множимаго. Было бы даже вполнѣ возможно установить подобное опредѣленіе на подходящихъ задачахъ и вообще провести разработку его съ учащимися въ духѣ конкректно-индуктивнаго метода. Подобнымъ же образомъ можно было бы поступить и при изученіи дѣленія на десятичную дробь. Такое построеніе курса было бы, съ моей точки зрѣнія, допустимо; но оно вызывало бы возраженія уже со стороны цѣлесообраз-

ности. Въ самомъ дѣлѣ, этотъ распорядокъ только переноситъ въ курсъ десятичныхъ дробей всѣ трудности ознакомленія съ понятіемъ объ умноженіи и дѣленіи на дробь; а съ другой стороны, при немъ не вполнѣ выдерживается переходъ отъ болѣе простого къ болѣе сложному, такъ какъ въ курсѣ обыкновенныхъ дробей, оставляемомъ напослѣдокъ, безспорно есть вопросы, дидактически болѣе простые, чѣмъ умноженіе и дѣленіе на десятичную дробь. При этомъ надо замѣтить, что и всѣ остальныя соображенія, которыя обычно приводятся въ пользу изученія курса десятичныхъ дробей передъ простыми, еще не обусловливаютъ собою именно такого порядка изученія: если знакомство съ десятичными дробями крайне важно для практики, то отсюда вытекаетъ, что ихъ нужно хорошо изучать въ школѣ, но еще тѣмъ самымъ не доказано, что ихъ нужно изучать передъ простыми дробями.

Слѣдуетъ ли изъ всего предыдущаго, что я высказываюсь за традиціонный порядокъ изученія курса: сперва простыя дроби, а затѣмъ десятичныя, какъ ихъ частный случай? Нисколько. Я полагаю, что наиболѣе цѣлесообразно будетъ распредѣлить весь курсъ дробей, простыхъ и десятичныхъ, на циклы, въ каждый изъ которыхъ входили бы вопросы приблизительно одинаковой дидактической трудности; подобная идея практиковалась и до сихъ поръ въ формѣ такъ назыв. пропедевтическаго курса дробей, но исключительно по отношенію къ простымъ дробямъ; я предложилъ бы распространить ту же точку зрѣнія и на десятичныя дроби.

Первый изъ этихъ цикловъ долженъ быть посвященъ конкретному ознакомленію съ простѣйшими, наиболѣе употребительными долями и дробями, выполняемому при помощи дѣйствительныхъ измѣреній и дѣленія предметовъ на части. Здѣсь слѣдуетъ имѣть въ виду экспериментальныя изслѣдованія Вальземанна*), который, между прочимъ, занимался вопросомъ о наиболѣе цѣлесообразныхъ наглядныхъ пособіяхъ при первоначальномъ ознакомленіи съ дробями. Онъ нашелъ, что наиболѣе ясныя и отчетливыя представленія о доляхъ и дробяхъ

*) Dr. Hermann Walsemann, Anschauungslehre der Rechenkunst, Schleswig 1907.

получаются при употребленіи квадратныхъ таблицъ, разграфленныхъ на прямоугольныя или квадратныя клѣтки, а не при помощи круга, раздѣленнаго на секторы, или прямой, раздѣленной на равные отрѣзки.

Цѣлью изученія этого перваго цикла являются твердое знаніе кратныхъ соотношеній между простѣйшими долями и умѣніе выполнять надъ ними счетъ и дѣйствія, преимущественно устно. Какія доли считать простѣйшими и важнѣйшими — это вопросъ довольно спорный, но я полагаю, что здѣсь нельзя ограничиваться 2-ми, 3-ми, ... 10-ми долями, а необходимо разсматривать и 12-ыя, и 24-ыя, и 40-ыя, и 100-ыя, и вообще разныя доли со знаменателями въ предѣлахъ первой сотни, находящіяся въ несложныхъ кратныхъ соотношеніяхъ съ вышеуказанными. Дѣло въ томъ, что основательное знакомство съ этими долями и составляемыми изъ нихъ дробями не безполезно для практическихъ вычисленій и отнюдь не можетъ быть замѣнено изученіемъ десятичныхъ дробей, какъ это иногда предлагаютъ.

Само собой разумѣется, что въ этомъ циклѣ всѣ дѣйствія совершаются по соображенію и учащимся не сообщаются какія-либо правила и опредѣленія; достаточно ограничиться объясненіемъ смысла важнѣйшихъ терминовъ (числитель, знаменатель, дробь правильная и неправильная и т. д.). Но задачи, которыя рѣшаются въ этомъ отдѣлѣ, должны быть по возможности разнообразнѣе и могутъ касаться любого дѣйствія надъ дробями, если только послѣднія разсматриваются, какъ собранія конкретныхъ долей цѣлаго; такъ что, напр., вопросъ о томъ, сколько разъ $\frac{1}{12}$ доля содержится въ $\frac{2}{3}$, можетъ быть съ успѣхомъ разбираемъ на этой ступени.

Въ общемъ, первый циклъ можетъ обнимать собою слѣдующіе вопросы: первоначальное понятіе о дроби, какъ совокупности конкретныхъ долей цѣлаго; изображеніе и чтеніе дробныхъ чиселъ; смыслъ числителя и знаменателя; понятіе о правильной и неправильной дроби; обращеніе неправильной дроби въ смѣшанное число и наоборотъ; раздробленіе болѣе крупныхъ долей въ болѣе мелкія и обратный вопросъ; сложе-

ніе и вычитаніе дробей съ одинаковыми, а затѣмъ и съ разными знаменателями; умноженіе и дѣленіе дроби на цѣлое число помощью соотвѣтственныхъ дѣйствій надъ числителемъ; опредѣленіе кратныхъ соотношеній между дробными числами, въ тѣхъ случаяхъ, когда искомое частное—цѣлое; нахожденіе данной части отъ цѣлаго числа; нахожденіе нѣкотораго числа по данной его части, въ томъ случаѣ, когда эта часть искомаго выражена цѣлымъ числомъ (причемъ каждый изъ послѣднихъ двухъ вопросовъ рѣшается двумя дѣйствіями съ помощью умноженія и дѣленія на цѣлое число).

Какъ видно, этотъ первый циклъ по содержанію сходенъ съ практикующимся у насъ пропедевтическимъ курсомъ дробей, но въ отличіе отъ традиціонной практики я подчеркиваю необходимость возможно большей конкретности при его прохожденіи. Только при этомъ условіи можно добиться того, чтобы учащіеся освоились со счетомъ простѣйшихъ дробныхъ чиселъ хотя бы въ такой мѣрѣ, въ какой они усваиваютъ дѣйствія надъ цѣлыми числами въ предѣлахъ первой сотни.

Изученіе перваго цикла дробей можетъ найти себѣ мѣсто, какъ и теперь, въ концѣ курса перваго класса средней школы (т. е. на 11-мъ году жизни учащихся). Возможно, конечно, выдѣлить изъ него еще болѣе узкій концентръ, именно знакомство съ дробями, знаменатели которыхъ не превышаютъ 10 или 12, и изучать этотъ концентръ въ еще болѣе раннюю пору обученія (въ приготовительномъ классѣ средней школы); но представляетъ ли такой распорядокъ значительныя преимущества—этотъ вопросъ можетъ рѣшить только практическій опытъ.

Второй циклъ (съ котораго, по моему мнѣнію, можетъ начинаться курсъ второго класса) долженъ быть посвященъ ознакомленію съ десятичными дробями (преимущественно десятыя, сотыя, тысячныя доли) и рѣшенію при помощи ихъ всѣхъ подходящихъ вопросовъ, но безъ введенія понятія объ умноженіи и дѣленіи на дробь. Первоначальное знакомство съ десятичными дробями должно, конечно, сопровождаться конкретными иллюстраціями, для чего хорошій матеріалъ даютъ метрическая система и подраздѣленія рубля. Затѣмъ (сохраняя

все время представленіе о дроби, какъ собраніи конкретныхъ долей цѣлаго) можно послѣдовательно изучить соотношенія между десятичными долями различныхъ разрядовъ, выяснить тѣсную связь ихъ съ нумераціей цѣлыхъ чиселъ и научить учащихся быстрому обращенію болѣе крупныхъ разрядныхъ единицъ въ болѣе мелкія, и наоборотъ. Послѣ этого учащіеся легко пріобрѣтутъ привычку смотрѣть на десятичную дробь, какъ на совокупность долей различныхъ разрядовъ, расположенныхъ по десятичной системѣ, и безъ труда смогутъ изучить и прилагать въ задачахъ сложеніе и вычитаніе десятичныхъ дробей и умноженіе десятичной дроби на цѣлое число. Что же касается дѣленія, то, разумѣется, сперва слѣдуетъ задавать только такія задачи, въ которыхъ частное отъ дѣленія десятичной дроби на цѣлое число выражалось бы конечной десятичной дробью, а также такія, въ которыхъ приходилось бы рѣшать, сколько разъ данная десятичная дробь содержится въ другой или въ цѣломъ числѣ, причемъ искомое частное было бы цѣлымъ. Затѣмъ, конечно, можно разбирать и случаи приближеннаго дѣленія десятичной дроби на цѣлое число (аналогично дѣленію съ остаткомъ въ курсѣ цѣлыхъ чиселъ); въ связи съ этимъ слѣдуетъ разобрать, на несложныхъ примѣрахъ, и вопросъ относительно обращенія простой дроби въ десятичную путемъ дѣленія числителя на знаменателя; но, разумѣется, относительно случаевъ необратимости простой дроби въ конечную десятичную достаточно ограничиться констатированіемъ, на примѣрахъ, факта безконечнаго дѣленія и не слѣдуетъ даже подымать вопроса о періодическихъ дробяхъ.

Въ этомъ же циклѣ слѣдуетъ рѣшать и вопросы, касающіеся нахожденія той или иной десятичной части отъ цѣлаго числа и наоборотъ, но безъ введенія понятія объ умноженіи и дѣленіи на дробь двумя дѣйствіями, совершаемыми при цѣломъ множителѣ или дѣлителѣ.

Необходимо добавить, что сюда же должно войти и ученіе о процентѣ, какъ сотой долѣ даннаго числа, и должны рѣшаться разнаго рода задачи на процентныя вычисленія, не требующія производства умноженія или дѣленія на дробь.

Наконецъ, третій циклъ (приходящійся также на курсъ

второго класса) посвящается такъ назыв. систематическому курсу дробей, простыхъ и десятичныхъ, изучаемыхъ параллельно, причемъ десятичныя дроби разсматриваются уже какъ частный случай простыхъ. Я называю этотъ курсъ систематическимъ не потому, чтобы въ немъ могла изучаться какая-либо формальная теорія дробей, а потому, что въ немъ должны быть приведены въ систему тѣ свѣдѣнія о дробяхъ, съ которыми учащіеся доселѣ познакомились. Въ этомъ курсѣ прежде всего придется остановиться на измѣненіи величины дроби при измѣненіи ея числителя и знаменателя, на неизмѣняемости этой величины при увеличеніи или уменьшеніи числителя и знаменателя въ одинаковое число разъ, и на преобразованіяхъ, основанныхъ на этомъ послѣднемъ законѣ—на сокращеніи дробей и приведеніи ихъ къ одному знаменателю. Такъ какъ само собою разумѣется, что въ задачи на этотъ курсъ должны входить дроби съ не особенно большими знаменателями, то можно предложить сдѣлать въ немъ довольно значительныя сокращенія сравнительно съ традиціонной программой, именно можно безусловно упразднить ученіе объ отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя, такъ какъ сокращеніе дробей, дѣйствительно употребляемыхъ на практикѣ, всегда выполняется путемъ отысканія «на-глазъ» общихъ множителей числителя и знаменателя. Что же касается отысканія наименьшаго кратнаго, выполняемаго для приведенія дробей къ одному знаменателю, то оно производится на практикѣ почти всегда на основаніи сохраненныхъ памятью учащихся важнѣйшихъ кратныхъ соотношеній между числами первой сотни, а не путемъ примѣненія общихъ правилъ; поэтому я считаю вѣроятнымъ, что въ курсѣ младшихъ классовъ, о которомъ здѣсь идетъ рѣчь, можно обойтись и безъ ученія о наименьшемъ кратномъ, а въ связи съ вышеизложеннымъ опустить и вообще ученіе о дѣлимости чиселъ, за исключеніемъ самыхъ терминовъ: «общій дѣлитель», «общее кратное», «общее наименьшее кратное» и т. д., которые полезны для сокращенія рѣчи и потому должны быть пояснены и употребляемы. Изученіе же теоріи дѣлимости чиселъ, общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго

слѣдовало бы отнести къ курсу теоретической ариѳметики, которому мѣсто въ послѣднемъ классѣ средней школы.

Изученіе, или вѣрнѣе, повтореніе сложенія и вычитанія дробныхъ чиселъ не представитъ никакихъ затрудненій. Не мѣшаетъ обратить вниманіе учащихся на то, что при сложеніи и вычитаніи обыкновенныхъ дробей приведеніе къ одному знаменателю обязательно, а при соотвѣтствующихъ дѣйствіяхъ надъ десятичными дробями—не обязательно.

Наконецъ, мы должны будемъ подойти къ кульминаціонному пункту всего курса—къ ученію объ умноженіи и дѣленіи на дробь.

Старая школа, какъ извѣстно, выводила правило умноженія на дробь при помощи общаго опредѣленія этого дѣйствія: «умножить значитъ составить изъ множимаго новое число такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы». Опредѣленіе это сообщалось обыкновенно догматически, съ разъясненіемъ на частномъ примѣрѣ того обстоятельства, что оно охватываетъ собою и случай умноженія на цѣлое число, а затѣмъ предлагалось разсужденіе вродѣ слѣдующаго: «умножить 5 на $\frac{3}{4}$ значитъ, согласно опредѣленію, составить изъ 5 новое число такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы; но множитель $\frac{3}{4}$ составленъ изъ единицы такъ: взята единица, раздѣлена на 4 равныхъ части, и такихъ частей взято 3; поэтому для полученія искомаго произведенія мы должны раздѣлить число 5 на 4 равныхъ части и полученное число $\frac{5}{4}$ взять (слагаемымъ) 3 раза; будемъ имѣть $\frac{15}{4}$». Послѣ этого путемъ сравненія полученнаго числа съ данными выводилось и самое правило умноженія на дробь.

Общеизвѣстны и тѣ серьезные дефекты, которыми страдаетъ этотъ традиціонный пріемъ объясненія вопроса.

Во-первыхъ, онъ не вполнѣ удовлетворителенъ съ логической стороны, такъ какъ способъ составленія числа изъ единицы, подразумѣваемый въ немъ, является не единственнымъ, и мы можемъ, нисколько не нарушая буквы опредѣленія, разсуждать слѣдующимъ образомъ: «число $\frac{3}{4}$ составлено изъ еди-

ницы такъ: «взята единица 3 раза слагаемымъ, затѣмъ 4 раза слагаемымъ, и первое изъ полученныхъ чиселъ сдѣлано числителемъ дроби, второе—ея знаменателемъ»; составляя же по этому «способу» новое число изъ множимаго 5, мы получимъ дробь $\frac{15}{20}$, а не $\frac{15}{4}$, какъ слѣдовало бы. Чтобы избѣжать этого парадокса, пришлось бы здѣсь (и въ другихъ аналогичныхъ случаяхъ) предварительно строго оговаривать, о какомъ именно способѣ составленія числа изъ единицы идетъ рѣчь; а благодаря этому, все объясненіе становится искусственнымъ и теряетъ свою убѣдительность. Во-вторыхъ, съ дидактической точки зрѣнія данное объясненіе страдаетъ излишней общностью, такъ какъ на этой ступени курса требуется выяснить только смыслъ умноженія на дробь, а не умноженія вообще. Въ третьихъ, съ педагогической стороны надо считать догматическое сообщеніе опредѣленій въ такой же мѣрѣ недопустимымъ, какъ и догматическое заучиваніе правилъ.

Неудовлетворительность традиціоннаго пріема заставляетъ искать новыхъ путей, и мы видимъ, что въ настоящее время предлагаются двѣ точки зрѣнія. Одни *) воскрешаютъ старинный пріемъ вывода правила умноженія на дробь при помощи законовъ измѣненія произведенія, установленныхъ для цѣлыхъ чиселъ, и предлагаютъ разсуждать примѣрно такъ: «вмѣсто умноженія 5 на $\frac{3}{4}$ будемъ множить 5 на 3; получимъ 15. Но отбросивъ знаменателя во множителѣ, мы увеличимъ его въ 4 раза; слѣд., и произведеніе увеличилось въ 4 раза противъ истиннаго; чтобы его исправить, уменьшаемъ найденное число 15 въ 4 раза, и получаемъ $\frac{15}{4}$». Этотъ пріемъ дѣйствительно легче традиціоннаго для запоминанія, но по существу онъ непріемлемъ по тѣмъ же причинамъ, какъ и разсмотрѣнное выше объясненіе умноженія на десятичную дробь: смыслъ умноженія на дробь остается невыясненнымъ для учащихся, а приведенное разсужденіе содержитъ замаскированное опредѣленіе дѣйствія, такъ какъ мы не имѣемъ логическаго права ссылаться

*) А. Б. Сахаровъ. Ариѳметика. Опытъ методическаго изложенія предмета. Спб. 1910 г.

здѣсь на законы измѣненія произведенія, установленные пока лишь для цѣлыхъ чиселъ, и, въ сущности говоря, вводимъ условіе считать произведеніемъ 5 на $\frac{3}{4}$ такое число, которое было бы въ 4 раза меньше произведенія 5 на 3. Поэтому, какъ было выяснено выше, данный пріемъ стоитъ въ коренномъ противорѣчіи съ однимъ изъ существенныхъ требованій современной дидактики: не пытаться симулировать доказательствъ тамъ, гдѣ нужно вводить новыя опредѣленія или условія.

Другіе авторы *) и педагоги предлагаютъ вмѣсто традиціоннаго объясненія просто вводить условія вродѣ слѣдующаго: «подъ произведеніемъ двухъ дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ мы будемъ разумѣть дробь $\frac{ab}{cd}$» (числителемъ которой является произведеніе числителей данныхъ дробей, а знаменателемъ—произведеніе знаменателей),—и сопровождать эти условія подходящей графической иллюстраціей. Такой пріемъ не грѣшитъ уже противъ логики, такъ какъ опредѣленіе произведенія вводится въ правильной и явной формѣ; но съ педагогической точки зрѣнія онъ столь же неудовлетворителенъ, какъ и прежніе, такъ какъ цѣль установленія указанныхъ здѣсь условій остается совершенно неясной для учащихся. Взрослый человѣкъ, который изучаетъ ариѳметику въ научномъ изложеніи, можетъ сознавать, что подобныя условія вводятся ради сохраненія основныхъ законовъ ариѳметическихъ дѣйствій при расширеніи понятія о числѣ, но учащемуся младшаго возраста такая точка зрѣнія совершенно недоступна, и онъ воспримѣтъ сообщенное ему условіе просто, какъ правило, которое надо выучить, хотя, быть можетъ, въ глубинѣ души будетъ сознавать, что его законный вопросъ—зачѣмъ введено это условіе—оставленъ безъ отвѣта. Что же касается графической иллюстраціи, то она можетъ пояснить только содержаніе принимаемаго условія, но не цѣль, ради которой оно принято.

Если, напр., учащійся беретъ $\frac{4}{5}$ нѣкотораго разграфлен-

*) См. В. Мрочекъ и Ф. Филипповичъ. Педагогика математики, томъ I, страница 252.

наго на клѣтки *прямоугольника*, составляющаго въ свою очередь $\frac{2}{3}$ другого большого прямоугольника *), и при этомъ убѣждается, что получаемая въ результатѣ фигура составляетъ $\frac{8}{15}$ большого прямоугольника, то онъ выноситъ наглядное подтвержденіе той мысли, что $\frac{4}{5}$ отъ $\frac{2}{3}$ равны $\frac{8}{15}$, *но не видитъ никакихъ мотивовъ*, въ силу которыхъ отвѣтъ на данный вопросъ записывается въ формѣ $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ и самому дѣйствію приписывается названіе умноженія.

Чтобы выйти изъ всѣхъ этихъ затрудненій, необходимо соблюсти основное требованіе конкретно-индуктивнаго метода, именно—исходить при установленіи понятія объ умноженіи на дробь изъ условія типичной конкретной задачи, которая рѣшалась бы съ помощью этого дѣйствія. Пусть, напр., будетъ взята хотя бы такая задача: «пѣшеходъ проходитъ 5 верстъ въ каждый часъ; сколько верстъ пройдетъ онъ за $\frac{3}{4}$ часа (двигаясь равномѣрно съ той же скоростью)?» Такую задачу учащіеся умѣютъ рѣшать, но двумя дѣйствіями: сперва они узнаютъ, сколько верстъ пройдетъ пѣшеходъ за одну четверть часа $(5 : 4 = \frac{5}{4})$, а затѣмъ найдутъ, сколько верстъ пройдетъ онъ за 3 четверти часа $\left(\frac{5}{4} \cdot 3 = \frac{15}{4}\right)$. Послѣ того, какъ эта задача рѣшена и рѣшеніе ея записано въ двухъ строкахъ, необходимо выяснить учащимся, путемъ наводящихъ вопросовъ, смыслъ произведенныхъ ими дѣйствій (мы нашли четвертую долю отъ 5 и затѣмъ взяли ее 3 раза слагаемымъ),—а затѣмъ указать, что вмѣсто этого принято говорить короче: «мы умножили число 5 на $\frac{3}{4}$», и записывать рѣшеніе задачи вмѣсто двухъ строчекъ въ одной: $5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$. Тогда учащимся нетрудно будетъ уже сообразить, что, напр., умножить 10 на $\frac{5}{8}$ значитъ найти восьмую долю отъ 10 и взять ее слагаемымъ 5 разъ, и вообще установить, что умножить на дробь значитъ

*) См. В. Мрочекъ и Ф. Филипповичъ. Педагогика математики, томъ I, страница 252.

взять такую долю множимаго, изъ какихъ состоитъ множитель, повторить ее слагаемымъ столько разъ, сколько долей во множителѣ. Не трудно будетъ также сравнить полученный результатъ съ данными числами и установить правило умноженія на дробь, напр., въ такой формѣ: «чтобы умножить на дробь, нужно умножить данное число на числителя и полученный результатъ раздѣлить на знаменателя» Здѣсь, конечно, необходимо выяснить съ помощью конкретныхъ примѣровъ, что порядокъ указанныхъ дѣйствій—умноженія на числителя и дѣленія на заменателя—можетъ быть измѣненъ безъ измѣненія получаемаго произведенія.

Предложенный здѣсь пріемъ объясненія умноженія на дробь, разумѣется, не представляетъ чего-либо существенно новаго. Онъ является видоизмѣненіемъ давно извѣстнаго пріема—разсматривать умноженіе на дробь, какъ нахожденіе данной части отъ цѣлаго. Но при такомъ способѣ объясненія учащіеся будутъ понимать смыслъ самаго процесса умноженія на дробь, притомъ въ наиболѣе конкретной формѣ и въ согласіи съ любой научной теоріей дробей. Кромѣ того, для нихъ будетъ сразу ясна одна изъ цѣлей, ради которой вводится предлагаемое условіе; цѣль эта—сокращеніе рѣчи и записи. Слѣдуетъ выяснить тутъ же и другую цѣль, ради которой повтореніе нѣкоторой доли даннаго числа носитъ названіе умноженія на дробь; именно, если замѣнить въ условіи разобранной задачи дробное число $\frac{3}{4}$ цѣлымъ, напр., 3-мя, то учащіеся увидятъ, что однородная съ данной задача на цѣлыя числа (пѣшеходъ проходитъ по 5 верстъ въ часъ; ск. верстъ пройдетъ онъ за 3 часа)—рѣшается умноженіемъ на цѣлое число. Всю силу этого мотива они оцѣнятъ, однако, уже тогда, когда будутъ учиться составлять буквенныя формулы рѣшенія задачъ; тогда имъ станетъ ясно, что для упрощенія языка формулъ однородныя по смыслу задачи должны рѣшаться одинаковыми дѣйствіями.

До сихъ поръ здѣсь шла рѣчь объ умноженіи цѣлаго числа на дробь, такъ какъ на подобномъ примѣрѣ легче всего выяснить смыслъ умноженія на дробь; когда же этотъ смыслъ усвоенъ

учащимися, нетрудно примѣнить установленную точку зрѣнія и къ случаю умноженія дроби на дробь. Такъ, напр., умноженіе $\frac{4}{5}$ на $\frac{2}{3}$ мы будемъ разсматривать, какъ взятіе одной третьей доли отъ $\frac{4}{5}$ $(\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{15})$ и повтореніе полученнаго числа $\frac{4}{15}$ два раза слагаемымъ $(\frac{4}{15} . 2 = \frac{8}{15})$; сравнивъ затѣмъ окончательный результатъ $\frac{8}{15}$ съ данными числами, мы легко заставимъ учащихся вывести извѣстное правило перемноженія двухъ дробей.

Какъ только усвоено понятіе объ умноженіи на дробь, необходимо распространить его и на случай десятичныхъ дробей; извѣстное правило умноженія на десятичную дробь получается тогда, какъ частный случай правила, установленнаго вообще для дробей. Опытъ показываетъ, что умноженіе на десятичную дробь воспринимается учащимися съ этой точки зрѣнія болѣе сознательно, такъ какъ они уясняютъ себѣ, что перемноженіе данныхъ чиселъ съ отброшенными запятыми есть, собственно говоря, перемноженіе числителей данныхъ дробей, а постановкою запятой на должномъ мѣстѣ произведенія мы уменьшаемъ полученное число во столько разъ, какъ велико произведеніе знаменателей данныхъ дробей.

Дѣленіе на дробь можетъ быть изъяснено пріемомъ, вполнѣ аналогичнымъ тому, который былъ указанъ при разсмотрѣніи умноженія. Возьмемъ, напр., задачу: «Гребецъ проѣхалъ въ лодкѣ 5 верстъ въ теченіе $\frac{3}{4}$ часа; сколько верстъ могъ бы онъ проѣхать въ часъ, двигаясь съ той же скоростью?» Подобную задачу учащіеся рѣшаютъ двумя дѣйствіями: сперва они узнаютъ, сколько верстъ проѣхалъ бы гребецъ въ одну четверть часа $(5 : 3 = \frac{5}{3})$, а затѣмъ опредѣлятъ, сколько верстъ онъ могъ бы проѣхать въ часъ $(\frac{5}{3} . 4 = \frac{20}{3}$ или $6\frac{2}{3})$. Затѣмъ нужно предложить учащимся сдѣлать повѣрку задачи; очевидно, для этой цѣли придется рѣшить обратный вопросъ: зная, что гребецъ проплываетъ въ лодкѣ $6\frac{2}{3}$ версты въ часъ, найти, сколько верстъ проплыветъ онъ за $\frac{3}{4}$ часа. Этотъ вопросъ рѣшается

умноженіемъ на дробь ($6\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$) и мы получаемъ въ результатѣ 5. Теперь ясно, что въ первоначальной задачѣ мы нашли такое число, которое, будучи умножено на $\frac{3}{4}$, дастъ въ результатѣ 5; условимся, какъ и въ ученіи о цѣлыхъ числахъ, называть отысканіе такого числа дѣленіемъ, и запишемъ рѣшеніе нашей задачи такъ: $5:\frac{3}{4}=\frac{20}{3}$, т. е. въ одной строчкѣ вмѣсто двухъ. Сравнивая полученный результатъ съ данными числами, мы установимъ съ учащимися и правило дѣленія на дробь, хотя бы въ такой формулировкѣ: «чтобы раздѣлить на дробь, нужно раздѣлить данное число на числителя дроби и полученный результатъ умножить на ея знаменателя»; при этомъ необходимо выяснить, на данномъ и другихъ конкретныхъ примѣрахъ, что относительный порядокъ этихъ дѣйствій:—дѣленія на числителя и умноженія на знаменателя—не вліяетъ на окончательный результатъ.

Затѣмъ необходимо показать, что сдѣланные выводы могутъ быть распространены и на тѣ случаи, когда приходится рѣшать вопросы, сколько разъ одно дробное число содержится въ другомъ, или какую часть одного числа составляетъ другое. Для этой цѣли пригодна, напр., такая задача: фунтъ кофе стоитъ $\frac{3}{4}$ рубля; сколько фунтовъ этого кофе можно купить на 5 рублей? Рѣшая эту задачу непосредственно, учащіеся найдутъ сперва, сколько четвертей рубля заключается въ 5 рубляхъ (4.5=20), а затѣмъ — сколько разъ $\frac{3}{4}$ рубля содержится въ 20 четвертяхъ рубля ($20:3=6\frac{2}{3}$), или могутъ разсуждать такъ: если бы фунтъ кофе стоилъ 1 четверть рубля, то на рубль можно было бы купить 4 ф. кофе, а на 5 рублей 4.5=20 фунтовъ; но такъ какъ цѣна фунта кофе—не $\frac{1}{4}$ рубля, а въ 3 раза больше ($\frac{3}{4}$ р.), то на тѣ же деньги можно купить кофе въ 3 раза меньше, т. е. 20:3, или $6\frac{2}{3}$ фунта. Затѣмъ дѣлается провѣрка задачи, и оказывается, что искомое въ ней число, будучи умножено на $\frac{3}{4}$, даетъ въ результатѣ 5; слѣд.

можно условиться называть его частнымъ данныхъ чиселъ и писать по предыдущему: $5:\frac{3}{4}=\frac{20}{3}$ или $6\frac{2}{3}$.

Какъ и при разборѣ умноженія, слѣдуетъ показать учащимся, что однородныя съ данными задачи на цѣлыя числа рѣшаются дѣленіемъ на цѣлое число; а затѣмъ необходимо распространить установленныя условія и на случай дѣленія дроби на дробь. Такъ, напр., дѣленіе $\frac{4}{5}$ на $\frac{3}{8}$ мы будемъ понимать, какъ *отысканіе такого числа, которое, будучи* помножено на $\frac{3}{8}$, даетъ въ результатѣ $\frac{4}{5}$. Въ силу этого опредѣленія $\frac{3}{8}$ искомаго числа должны быть равны $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{8}$ искомаго числа должна быть въ 3 раза меньше $\frac{4}{5}$, т. е. $\frac{4}{15}$; а все искомое число должно быть въ 8 разъ больше полученной дроби, т. е. равно $\frac{32}{15}$. Сравнивая этотъ результатъ съ данными числами, учащіеся могутъ установить извѣстное правило дѣленія дроби на дробь.

Далѣе, всѣ сдѣланные выводы должны быть распространены на случай дѣленія на десятичную дробь. Дѣленіе на десятичную дробь лучше всего разсматривать, какъ частный случай дѣленія на дробь вообще: напр., при дѣленіи 2 на 0,3 мы должны умножить 2 на знаменателя данной дроби, т. е. на 10, и полученное число 20 раздѣлить на числителя 3; слѣд., $2:0,3=20:3=6\frac{2}{3}$; при дѣленіи 0,002 на 0,03 мы должны умножить 0,002 на знаменателя дѣлителя, т. е. на 100, и результатъ 0,2 раздѣлить на числителя 3; найдемъ частное 0,0666... Такимъ образомъ мы легко выяснимъ учащимся, что дѣленіе на десятичную дробь можетъ быть приведено къ дѣленію на цѣлое число.

Изложеннымъ исчерпываются, собственно говоря, всѣ основные вопросы методики курса дробей, проходимаго въ младшихъ классахъ нашей средней школы и соотвѣтствующихъ классахъ другихъ учебныхъ заведеній. Какъ извѣстно, традиціонная практика, кромѣ упомянутыхъ здѣсь вопросовъ, удѣляетъ довольно много времени и вниманія ученію о безконеч-

ныхъ десятичныхъ періодическихъ дробяхъ и объ обращеніи ихъ въ обыкновенныя. Но въ настоящее время уже никто не оспариваетъ той истины, что этому ученію совсѣмъ не должно быть мѣста въ курсѣ дробей, изучаемомъ въ младшемъ возрастѣ, тѣмъ болѣе, что оно не можетъ быть изложено на данной ступени безъ крупныхъ логическихъ натяжекъ. Вопросъ о періодическихъ дробяхъ долженъ быть отнесенъ къ курсу теоретической ариѳметики, гдѣ онъ, въ связи съ понятіемъ о безконечной не періодической десятичной дроби, играетъ нѣкоторую роль при изложеніи ученія о несоизмѣримомъ числѣ; въ младшемъ же возрастѣ ученіе о періодическихъ дробяхъ, ихъ видахъ и правилахъ ихъ обращенія въ простыя является тяжелымъ и совершенно безполезнымъ балластомъ, отъ котораго давно пора освободить нашу программу ариѳметики и наши подростающія поколѣнія».

Тезисы.

1) Въ методикѣ ученія о дробяхъ самымъ спорнымъ пунктомъ является въ настоящее время вопросъ объ относительномъ порядкѣ изученія дробей простыхъ и десятичныхъ.

2) Ни традиціонное распредѣленіе (сперва полный курсъ простыхъ дробей, затѣмъ десятичныя дроби, какъ ихъ частный случай), ни предлагаемый въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ обратный порядокъ (сперва всѣ дѣйствія надъ десятичными дробями, затѣмъ болѣе или менѣе полный курсъ простыхъ дробей),— не могутъ считаться вполнѣ удовлетворительными съ педагогической точки зрѣнія.

3) Наиболѣе цѣлесообразнымъ является распредѣленіе всего курса дробей на циклы, въ каждомъ изъ которыхъ изучались бы вопросы приблизительно одинаковой дидактической трудности.

4) Первый изъ этихъ цикловъ долженъ быть отведенъ ознакомленію съ простѣйшими дробями помощью наглядныхъ пособій и дѣйствительнаго измѣренія и дѣленія предметовъ на части.

5) Второй циклъ слѣдуетъ посвятить изученію десятич-

ныхъ дробей и рѣшенію при помощи ихъ всѣхъ подходящихъ вопросовъ, но безъ изученія дѣйствій умноженія и дѣленія на дробь.

6) Въ третьемъ циклѣ слѣдуетъ проходить простыя и десятичныя дроби параллельно и ввести въ соотвѣтственный моментъ понятіе объ умноженіи и дѣленіи на дробь на цѣлесообразно подобранныхъ конкретныхъ примѣрахъ.

7) Независимо отъ вышеизложеннаго, въ традиціонной программѣ ариѳметики должны быть сдѣланы цѣлесообразныя сокращенія въ курсѣ дробей и по вопросамъ, съ ними связаннымъ, а именно: слѣдуетъ значительно сократить ученіе о дѣлимости чиселъ и совершенно упразднить изученіе періодическихъ десятичныхъ дробей.

Пренія по докладу К. Ѳ. Лебединцева.

М. Е. Волокобинскій (Рига) заступается за тѣхъ авторовъ, которые высказываются за прохожденіе десятичныхъ дробей ранѣе простыхъ. По его мнѣнію, сами учащіеся чувствуютъ, что для помноженія числа на $\frac{1}{10}$ надо взять одну десятую долю множимаго. Оппонентъ указалъ, что въ нѣмецкихъ методикахъ ариѳметики еще десять лѣтъ тому назадъ говорилось о томъ, что помножить число на $\frac{2}{5}$ - значитъ взять двѣ пятыя доли этого числа. Онъ, вообще, не считаетъ предложеній докладчика новыми.

А. Н. Шапошниковъ (Москва), присоединившись ко всѣмъ положеніямъ доклада, указалъ, что онъ болѣе пяти лѣтъ осуществлялъ съ полнымъ успѣхомъ ту-же систему обученія дробьямъ. Лишь въ вопросѣ объ умноженіи на дробь онъ предпочитаетъ разъяснять опредѣленіе, правило и выводъ относительно вопроса. рѣшаемаго умноженіемъ на дробь (или дѣленіемъ). Опредѣленіе сначала усматривается на конкретной задачѣ умноженія на цѣлое число. Если замѣнить цѣлое число дробью и пожелать оперировать съ членами этой дроби, то умноженіе будетъ выполнено двумя дѣйствіями: дѣленіемъ на знаменателя и умноженіемъ на числителя. Отсюда первый доводъ въ пользу естественности введенія подобнаго дѣйствія, какъ умноженія. Итакъ, умноженіе на дробь, т. е. на число, выраженное сложнѣе, чѣмъ цѣлое, раз-

сматривается, какъ болѣе сложное дѣйствіе, состоящее изъ двухъ простыхъ. Выводъ о томъ, какой вопросъ рѣшается умноженіемъ на дробь, получается уже легко: дѣленіемъ на знаменателя находится доля, а умноженіемъ на числителя—нѣсколько долей. Этотъ выводъ формулируется обстоятельнѣе, чѣмъ это обыкновенно принято, а именно такъ: *умноженіемъ на дробь мы находимъ по размѣру даннаго числа размѣръ одной или нѣсколькихъ его части*".

В. М. Куперштейнъ (Елисаветградъ). „Жаль, что докладчикъ упустилъ изъ виду чрезвычайно важное соображеніе въ пользу того, чтобы простыя дроби проходились раньше десятичныхъ. Слишкомъ уже извѣстно всѣмъ, что дѣти своими же руками должны получать $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_3$, $^1/_6$ и т. д. часть предмета, разрѣзывая его на названныя части. Что же мы сдѣлаемъ съ десятичными долями, когда самыя крупныя доли—это десятыя, а слѣдующія—уже сотыя? Но докладчикъ, по моему, ошибается, допуская дѣленіе, въ которомъ частное получается неточное. Если докладчикъ желаетъ выбросить изъ начальнаго курса ариѳметики періодическія дроби, то это является нераціональнымъ, ибо дѣти, часто встрѣчая въ разныхъ книжкахъ этотъ терминъ, сами заговорятъ о нихъ при полученіи неточнаго частнаго".

Я. Г. Сарвъ (Юрьевъ). „По моему, умноженіе и дѣленіе дробей при изложеніи, согласномъ съ предложеніями докладчика, не сложнѣе сложенія и вычитанія дробей съ разными знаменателями. Поэтому, я думаю, что умноженіе и дѣленіе дробей можно даже пройти ранѣе сложенія и вычитанія. Далѣе, слѣдовало-бы уже оставить отбрасываніе запятыхъ при умноженіи и дѣленіи десятичныхъ дробей и пріучать учащихся сосчитывать десятыя, сотыя и т. д. доли такимъ-же образомъ, какъ сосчитываются единицы высшихъ разрядовъ".

П. А. Павловъ (Тифлисъ). „Дроби не должны быть выдѣляемы въ отдѣльный концентръ, такъ какъ дѣти знакомятся съ частями единицы совмѣстно съ цѣлыми числами. Опираясь на психологію ребенка, всѣ дѣйствія надъ дробями надо проходить параллельно съ дѣйствіями надъ цѣлыми числами. Относительно дѣленія дробей, выдѣляемаго докладчикомъ, ввиду его трудности, въ отдѣльный концентръ, нужно сказать, что это совершенно излишне. Дѣленіе дробей крайне упрощается приведеніемъ дробей къ общему знаменателю".

П. П. Потоцкій (Москва): «1) Дѣйствія надъ десятичными дробями проще, такъ какъ они не имѣютъ знаменателя; 2) логическая ошибка—распространеніе свойствъ цѣлыхъ чиселъ на дробныя—отпадаетъ при томъ взглядѣ на десятичныя дроби, по которому они являются результатомъ десятичной системы; этимъ облег-

чается объясненіе умноженія и дѣленія десятичныхъ дробей; 3) опредѣленіе умноженія и дѣленія на дробь слѣдуетъ давать лишь послѣ усвоенія учениками самихъ дѣйствій".

В. Р. Мрочекъ (Спб.) «Не знаешь, удивляться или негодовать, выслушивая подобные доклады. Вопросъ, имѣющій за собою столѣтнюю давность, рѣшаемый и давно рѣшенный на практикѣ, здѣсь представленъ въ видѣ какого-то гордіева узла, а его quasi—сѣченіе преподносится въ видѣ педагогической Америки. Порядокъ прохожденія, предлагаемый г. Лебединцевымъ, давно уже сталъ притчей во языцѣхъ, а за послѣдніе годы онъ вошелъ во всѣ оффиціальныя программы. Въ той же «Педагогикѣ Математики», съ которой полемизировалъ докладчикъ, имѣется цитата, имъ не упомянутая (стр. 247); я ее приведу: «Изъ изложеннаго видно, что курсъ дробей долженъ распадаться на три цикла. Въ первомъ надо познакомить дѣтей съ простѣйшими случаями дробленія конкретныхъ «единицъ» (см. программу курса); эти четвертушки, половинки, восьмушки свободно усваиваются дѣтьми, также, какъ и простыя выкладки надъ ними. Во второмъ—научить производить дѣйствія надъ десятичными конечными числами. Въ третьемъ—изложить не теорію обыкновенныхъ дробей, а лишь условныя опредѣленія оперированія съ символами $\frac{a}{b}$ и $\frac{a_1}{b_1}$ на числовыхъ, а затѣмъ и буквенныхъ примѣрахъ, поскольку эти операціи необходимы въ курсѣ уравненій. Само собой разумѣется, что теорія дѣлимости чиселъ должна быть исключена изъ курса».—Что же новаго предлагаетъ въ такомъ случаѣ г. Лебединцевъ»?

„Оставимъ, поэтому, мысли доклада въ сторонѣ и посмотримъ содержаніе. Долженъ указать, что докладчикъ неправильно передаетъ цитируемыхъ имъ авторовъ. Такъ, цитируя нашу книгу, онъ приписываетъ намъ рекомендацію опредѣленія умноженія дроби на дробь, тогда какъ мы привели лишь мнѣніе Вебера и Вельштейна. Жаль, что, указывая на стр. 252, докладчикъ упустилъ изъ виду стр. 253, гдѣ сказано: «Дробь есть результатъ измѣренія, дробь есть количество. Это—гносеологическая точка зрѣнія. Она—и только она—доступна школьному пониманію и т. д.». Подобная же путаница произошла и съ другой цитатой (о графической иллюстраціи произведенія двухъ дробей): мы ея не рекомендуемъ, а мы лишь поясняемъ, что, принявъ опредѣленіе теоріи паръ, надо дать иллюстрацію".

„Не лучше дѣло обстоитъ и съ Вальземанномъ. Вопросъ о формѣ пособій имѣетъ богатую литературу, особенно нѣмецкую и американскую; спеціально по вопросу о дробяхъ давно уже установлено, что кругъ—лучшее пособіе, такъ какъ: часть прямо-

угольника похожа на прямоугольникъ, но никакая часть круга не похожа на кругъ. Зачѣмъ же принимать результаты одной работы за откровеніе?"

„Такъ какъ докладчикъ особенно много удѣлилъ вниманія умноженію дробей, то я приведу мнѣніе Пуанкарэ (Les définitions générales en mathématiques), высказанное имъ еще въ 1904 году: «Разсмотримъ дѣйствія надъ дробями. Здѣсь трудность только въ опредѣленіи умноженія. Лучше всего сначала изложить теорію пропорцій,—только изъ нея можетъ вытечь логическое опредѣленіе; но чтобы обезпечить правильное пониманіе опредѣленій, встрѣчающихся въ началѣ этой теоріи, надо ихъ подготовить многочисленными примѣрами, взятыми изъ классическихъ задачъ на тройное правило, въ которыя надо позаботиться ввести дробныя данныя». Такъ что: «пѣшеходъ, проходящій 5 верстъ...» Но комментаріи, какъ будто, и излишни?".

„Итакъ: повторять азбуку иногда полезно, но надо выбрать подходящее время".

К. Ѳ. Лебединцевъ (Москва). „Въ отвѣтъ на сдѣланныя замѣчанія еще разъ изложу вкратцѣ свою точку зрѣнія на вопросъ объ относительномъ порядкѣ прохожденія курса дробей простыхъ и десятичныхъ. Есть два противоположныхъ взгляда на этотъ вопросъ: одинъ, традиціонный, по которому сперва долженъ проходиться полный курсъ простыхъ дробей, а затѣмъ должны изучаться десятичныя дроби, какъ ихъ частный случай; другой, предлагаемый нѣкоторыми сторонниками реформы, состоитъ въ томъ, чтобы предпосылать курсу простыхъ дробей изученіе всѣхъ дѣйствій надъ дробями десятичными. Педагогическіе недостатки традиціонной точки зрѣнія извѣстны и не оспариваются. Но если мы примемъ вторую точку зрѣнія, то неизбѣжно столкнемся съ необходимостью объяснить учащимся, на чемъ основано правило умноженія на десятичную дробь. Если при этомъ ссылаться на законы измѣненія произведенія, установленные пока только для цѣлыхъ чиселъ, то мы впадемъ въ логическую ошибку; если же давать полное опредѣленіе умноженія на десятичную дробь (какъ это дѣлается, напр., въ задачникѣ пяти московскихъ преподавателей), то естественно поставить вопросъ: да цѣлесообразно ли это съ педагогической точки зрѣнія? Не лучше ли выдѣлить изъ курса десятичныхъ дробей тѣ вопросы, которые не связаны съ понятіемъ объ умноженіи и дѣленіи на дробь, и создать изъ этихъ вопросовъ особый концентръ, какъ это предложено въ докладѣ, а изученіе умноженія на дробь (все равно, десятичную или простую) отнести къ концу курса дробей? Правда, г. Мрочекъ указалъ, что можно вовсе не говорить

объ умноженіи и дѣленіи на дробь въ курсѣ ариѳметики младшихъ классовъ. Но такая точка зрѣнія не пріемлема, потому что въ этомъ случаѣ мы при началѣ курса алгебры не всегда могли бы составлять такія общія формулы рѣшенія задачъ, которыя охватывали бы собою и цѣлыя, и дробныя значенія буквъ. По поводу мнѣнія Пуанкарэ, приведеннаго г. Мрочекомъ, можно сказать, что предлагаемый имъ способъ объясненія, конечно, допустимъ съ логической точки зрѣнія; но не доказана его бо́льшая цѣлесообразность въ педагогическомъ отношеніи".

„Графическое истолкованіе умноженія на дробь, конечно, цѣлесообразно для уясненія смысла этого дѣйствія, но оно недостаточно, т. к. не даетъ учащемуся отвѣта на вопросъ, съ какой цѣлью извѣстная совокупность дѣйствій (умноженія на числителя и дѣленія на знаменателя) названа именно «умноженіемъ на дробь". Что касается вопроса о круглой или прямоугольной формѣ наглядныхъ пособій, то опыты Вальземанна, упомянутые въ докладѣ, привели его къ заключенію о преимуществѣ прямоугольной формы; если другіе экспериментаторы пришли къ инымъ результатамъ, то значитъ вопросъ еще споренъ, и необходимы новые опыты для его разъясненія. Но этотъ вопросъ не имѣетъ прямого отношенія къ основнымъ положеніямъ доклада. Наличность періодическихъ дробей въ существующихъ задачникахъ не можетъ служить препятствіемъ къ устраненію изученія этихъ дробей изъ курса ариѳметики. Нужны такіе задачники, которые бы не содержали періодическихъ дробей, а при пользованіи существующими задачниками учитель можетъ замѣнятъ періодическія дроби соотвѣтственными простыми".

„Въ заключеніе подчеркиваю, что основной цѣлью доклада было предложить такое распредѣленіе курса дробей простыхъ и десятичныхъ, которое совмѣщало бы всѣ выгодныя стороны ранняго изученія десятичныхъ дробей съ отсутствіемъ логическихъ натяжекъ и такимъ образомъ удовлетворяло бы, какъ научно-логическимъ, такъ и педагогическимъ требованіямъ".

V. Приближенныя и сокращенныя вычисленія въ средней школѣ.

Докладъ В. А. Крогіуса (Спб.).

«Все чаще раздаются голоса, указывающіе, что современная школьная математика часто занимается вопросами, не имѣющими существеннаго (научнаго или практическаго) значенія,

напр., занимается рѣшеніемъ нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ уравненій четвертой степени, между тѣмъ, какъ было бы гораздо полезнѣе дать понятіе о графическомъ рѣшеніи уравненій. Вообще, вопросы, разсматриваемые въ средней школѣ, и въ особенности въ гимназіяхъ, часто носятъ характеръ матеріала, случайно вырваннаго изъ различныхъ отдѣловъ математики, безъ какой-бы то ни было связи со всѣмъ остальнымъ. Такіе примѣры, какъ періодическія и непрерывныя дроби, всѣмъ извѣстны. Но ни въ одной области эта случайность не сказывается такъ рѣзко, какъ въ области приближенныхъ вычисленій. Въ средней школѣ учатъ съ опредѣленной точностью вычислять корень квадратный; въ высшей— останавливаются преимущественно на приближенномъ рѣшеніи уравненій и на приближенномъ вычисленіи опредѣленныхъ интеграловъ. Между тѣмъ, правилъ для приближеннаго выполненія болѣе простыхъ операцій, какъ умноженіе и дѣленіе въ средней школѣ, или вычисленіе производной для опредѣленнаго значенія независимаго перемѣннаго по частнымъ значеніямъ функціи, часто совсѣмъ не даютъ. Такое положеніе создалось, вѣроятно, вслѣдствіе того, что эти простѣйшія операціи могутъ быть всегда выполнены точно, если только точно заданы компоненты (при умноженіи и дѣленіи) или задана функція, а не рядъ отдѣльныхъ ея значеній. Несомнѣнно, однако, что умѣніе производить вычисленія приближенно чрезвычайно важно.

Вообще же, надо признать, что кончающіе среднюю школу вычисляютъ плохо, а о приближенныхъ вычисленіяхъ не имѣютъ понятія, напр., не знаютъ, что при вычисленіи съ помощью пятизначныхъ таблицъ, нельзя брать для π значеніе $\frac{22}{7}$. Особенное затрудненіе испытываютъ учащіеся и ихъ руководители, какъ въ средней, такъ и въ высшей школѣ, во время практическихъ работъ. Имѣя опытныя данныя съ тремя цифрами, учащіеся часто берутъ результатъ отъ перемноженія или дѣленія ихъ съ пятью и шестью цифрами. Знакомясь съ методами приближеннаго рѣшенія уравненій, студенты изучаютъ только теорію и избѣгаютъ продѣлывать какіе-нибудь при-

мѣры, такъ какъ приближенное выполненіе элементарныхъ дѣйствій имъ мало знакомо, и все это выходитъ хорошо только въ теоріи. Въ виду всего этого, необходимо учить вычисленію. Это умѣнье складывается изъ умѣнья вычислять быстро и вычислять вѣрно. Я думаю, что оба эти качества почти одинаково важны. И напрасно, по моему мнѣнію, П. А. Долгушинъ *), авторъ самаго обстоятельнаго сочиненія на русскомъ языкѣ по приближеннымъ вычисленіямъ, считаетъ, что сокращенныя вычисленія составляютъ роскошь для средней школы.

Приближенныя вычисленія выполняются, какъ извѣстно, не съ числами, дающими истинныя значенія величинъ, а съ числами, измѣряющими эти значенія съ нѣкоторой погрѣшностью. Погрѣшность числа опредѣляется абсолютной ошибкой, относительной ошибкой или числомъ вѣрныхъ цифръ, причемъ лучшее опредѣленіе точности даетъ относительная ошибка. Поэтому мы чаще всего опредѣляемъ ошибку въ процентахъ. Нѣсколько худшее понятіе даетъ число вѣрныхъ цифръ, напр., если числа 987 и 187 имѣютъ по три вѣрныхъ цифры, то ошибка перваго меньше $\frac{1}{900}$, а второго меньше $\frac{1}{150}$. Наконецъ, худшее опредѣленіе точности даетъ абсолютная ошибка; напр., дано, что нѣкоторая длина измѣрена съ абсолютной ошибкой въ 1 см.; измѣреніе сдѣлано точно, если это длина въ 1 км., и очень неточно, если она равна 1 дм.

Теорія приближенныхъ вычисленій рѣшаетъ двѣ основныя задачи: во-первыхъ, по даннымъ приближеннымъ значеніямъ вычислить результатъ съ наибольшей возможной точностью; во-вторыхъ, по даннымъ точнымъ или заданнымъ съ малой погрѣшностью значеніямъ найти результатъ съ опредѣленной напередъ заданной точностью. При этомъ послѣдняя задача распадается на двѣ: 1) найти результатъ съ заданной абсо-

*) Всѣ замѣчанія о методѣ П. Долгушина сдѣланы на основаніи перваго изданія брошюры «П. Долгушинъ. Вычисленія по приближенію». Въ 1912 году вышло второе изданіе той-же брошюры, въ которомъ авторъ еще значительно улучшилъ и упростилъ свой методъ, въ особенности при опредѣленіи числа цифръ, которое нужно взять въ каждомъ компонентѣ.

В. К.

лютной ошибкой и 2) съ заданнымъ числомъ вѣрныхъ цифръ или съ заданной относительной ошибкой. (Подъ рубрикой 2) соединены двѣ различныя задачи, но онѣ мало отличаются другъ отъ друга). Эти три различныя задачи имѣютъ очень различное практическое значеніе. Первая задача—нахожденіе результата съ наибольшей точностью—встрѣчается рѣдко и почти не имѣетъ практическихъ приложеній. Вторая задача имѣетъ сравнительно малое значеніе, потому что, какъ уже замѣчено, точность лучше опредѣляется относительной, чѣмъ абсолютной ошибкой; эта задача не встрѣчается въ техникѣ, но имѣетъ приложеніе въ коммерческихъ наукахъ, гдѣ часто, независимо отъ значенія суммы, требуется вычислить ее съ точностью до 1 рубля или до 1 копейки. Наконецъ, послѣдняя задача,—нахожденіе результата съ данной относительной ошибкой или съ даннымъ числомъ вѣрныхъ цифръ, имѣетъ наибольшее значеніе; почти только эта задача встрѣчается въ техникѣ, и въ средней общеобразовательной школѣ было бы вполнѣ достаточно ознакомить именно съ этой задачей.

Единственный цѣлесообразный строгій методъ для рѣшенія этой задачи заключается въ слѣдующемъ: вычисляютъ приближенное значеніе результата; затѣмъ, имѣя приближенный результатъ и относительную ошибку, находятъ абсолютную ошибку результата и, переходя послѣдовательно отъ окончательнаго результата къ заданнымъ компонентамъ, опредѣляютъ, съ какимъ числомъ цифръ надо взять каждый изъ компонентовъ. Такой методъ неудобенъ вообще, и особенно рѣзко это сказывается въ томъ случаѣ, если требуется вычислить результатъ съ небольшимъ числомъ цифръ, напр., съ тремя. Поэтому было бы чрезвычайно важно дать такія практическія правила, которыми можно было бы пользоваться въ не очень сложныхъ задачахъ, не прибѣгая къ предварительному вычисленію результата для опредѣленія допустимой для каждаго компонента погрѣшности.

Разсмотримъ вопросъ о числѣ вѣрныхъ цифръ результата какого-нибудь дѣйствія, напр., умноженія. Для этого воспользуемся теоремой: относительная ошибка произведенія меньше или равна суммѣ относительныхъ ошибокъ множителей. (Дѣйствительно, относи-

тельная ошибка произведенія*) $\frac{(a+\partial a)(b+\partial b)-ab}{ab}=\frac{a\partial b+b\partial a+\partial a\partial b}{ab}$ $=\frac{\partial a}{a}+\frac{\partial b}{b}=\alpha+\beta$, членомъ $\frac{\partial a\partial b}{ab}$ можно пренебречь, поэтому относительная ошибка произведенія равна или меньше, если ∂a и ∂b различныхъ знаковъ, суммы относительныхъ ошибокъ множителей). Положимъ, дано два числа, имѣющихъ по n вѣрныхъ цифръ; въ такомъ случаѣ относительная ошибка произведенія равна или меньше $\frac{1}{p_1}\frac{1}{10^{n-1}}+\frac{1}{p_2}\frac{1}{10^{n-1}}=\frac{1}{10^{n-1}}\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right)=\frac{1}{P}\cdot\frac{1}{10^{n-1}}$, гдѣ p_1 и p_2 первыя значащія цифры множителей. Если $\frac{1}{2}<P<1$, (что можетъ случиться только тогда, когда, по крайней мѣрѣ, одно изъ чиселъ начинается съ единицы), то относительная ошибка меньше $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10^{n-2}}$ и число вѣрныхъ цифръ $n-2$ или $n-1$; если $P>1$, то число вѣрныхъ цифръ $(n-1)$ или n. Если оба числа начинаются съ цифры не меньше двухъ, то число вѣрныхъ цифръ произведенія не можетъ быть меньше $n-1$. Вообще, въ произведеніи двухъ чиселъ съ n вѣрными цифрами почти всегда можно указать $(n-1)$ вѣрныхъ цифръ. Однако, если ошибка въ каждомъ или одномъ изъ компонентовъ происходитъ только отъ закругленія, т. е. меньше $\frac{1}{2p\cdot10^{n-1}}$, гдѣ p первая цифра числа, то погрѣшность произведенія вдвое меньше указанной выше, знакъ ея часто извѣстенъ, и можно почти съ достовѣрностью указать $(n-1)$ вѣрныхъ цифръ въ произведеніи, а взявъ въ произведеніи n цифръ, сдѣлаемъ рѣдко ошибку, бо́льшую двухъ единицъ въ послѣдней цифрѣ. Всѣ предыдущія утвержденія можно съ такимъ же основаніемъ высказать относительно частнаго и съ еще большимъ основаніемъ относительно корня квадратнаго. (Относительная ошибка частнаго не больше суммы относительныхъ ошибокъ дѣлимаго и дѣлителя, а относительная ошибка корня равна половинѣ относительной ошибки подкоренного количества).

При приближенныхъ вычисленіяхъ чрезвычайно удобно пользоваться также сокращенными вычисленіями, способы которыхъ могутъ быть даны и въ средней школѣ. Сокращенный способъ умноженія Oughtread'а заключается въ слѣдующемъ.

*) ∂a и ∂b—абсолютныя, α и β—относительныя ошибки множителей. В. К.

Цифры множителя пишутъ подъ цифрами множимаго въ обратномъ порядкѣ; затѣмъ составляютъ произведенія множимаго на каждую цифру множителя, причемъ составляютъ произведеніе, начиная только съ той цифры множимаго, которая стоитъ надъ цифрой множителя, на которую помножаютъ; всѣ отдѣльныя произведенія такъ подписываютъ одно подъ другимъ, чтобы послѣднія цифры ихъ находились въ одномъ столбцѣ. Положимъ, дано перемножить 9749 на 72,45, при чемъ допускается откидываніе цифръ низшаго порядка, чѣмъ сотни; подписываемъ множитель такъ, чтобы единицы множителя находились подъ цифрой сотенъ множимаго. Умноженіе располагается слѣдующимъ образомъ:

```
  9749
 5427
------
 6818
  194
   36
------
 7048 сотенъ.
```

Между тѣмъ, истинное произведеніе — 706315,05, т. е. заключаетъ 7063 сотни. Чтобы получить въ произведеніи вѣрное число единицъ опредѣленнаго n-го порядка (т. е. отличное отъ истиннаго менѣе, чѣмъ на единицу этого порядка) можно пользоваться слѣдующимъ строгимъ правиломъ: подписать цифру единицъ множителя подъ цифрой множимаго $(n+2)$-го порядка; затѣмъ, выполнивъ перемноженіе, откинуть двѣ послѣднія цифры, а послѣднюю изъ оставшихся цифръ увеличить на единицу (см., напр., Vieille). Умноженіе для даннаго примѣра слѣдующее:

```
  97490
  5427
-------
 682430
  19498
   3896
    485
-------
 706309
```

Результатъ 7064 сотни (отличается отъ истиннаго менѣе, чѣмъ на одну сотню). Приведенное правило остается справед-

ливымъ, если число цифръ искомаго произведенія не велико, напр., не больше десяти. Тотъ же результатъ можно получить, подписывая множитель такъ же, какъ въ первомъ случаѣ, прибавляя, однако къ каждому произведенію закругленное число десятковъ произведенія цифры множителя на первую (изъ откинутыхъ) закругленную цифру множимаго. Тогда умноженіе представится въ слѣд. видѣ:

$$\begin{array}{r} 9749 \\ 5427 \\ \hline 6824 \\ 195 \\ 39 \\ 5 \\ \hline 7063 \end{array} \text{ сотенъ.}$$

Здѣсь къ первому произведенію $947\times7=6818$ прибавлено 6, т. е. прибавлено (закругленное) число десятковъ произведенія 7×9, ко второму произведенію $97\times2=194$ прибавлено число десятковъ произведенія 2×5, т. е. 1, причемъ взято 2×5, а не 2×4, т. к. послѣ цифры 4 стоитъ цифра 9.

При такомъ способѣ перемноженія погрѣшность (по сравненію съ первымъ способомъ) уменьшается, вообще, болѣе, чѣмъ въ десять разъ, т. к., во-первыхъ, принимается во вниманіе не просто слѣдующая цифра, а слѣдующая цифра съ закругленіемъ, и, во-вторыхъ, ошибки здѣсь могутъ быть разныхъ знаковъ, и вѣроятность того, что онѣ отчасти сократятся, очень велика. Поэтому произведеніе чиселъ съ небольшимъ числомъ знаковъ (напр., четырехъ—или пятизначныхъ), полученное по описанному способу, только въ рѣдкихъ случаяхъ будетъ отличаться отъ истиннаго на одну или двѣ единицы послѣдняго знака. (Въ приведенномъ, взятомъ наудачу, примѣрѣ всѣ цифры вѣрны).

Сокращенное дѣленіе дѣлается слѣдующимъ образомъ: положимъ, дано раздѣлить 743293 на 85672; сначала дѣлятъ на 85672, затѣмъ остатокъ 57917, не приписывая нуля, дѣлятъ на 8567 и т. д.

```
743293 | 85672
685376   8,6761
------
 57917
 51402
------
  6515
  5992
------
   523
   510
------
    13
```

Частное получилось 8,6761; между тѣмъ истинный результатъ 8,6759. Правило для опредѣленія погрѣшности слѣдующее: чтобы получить въ частномъ n вѣрныхъ цифръ, слѣдуетъ взять въ дѣлителѣ (n+2) цифры [во многихъ случаяхъ можно ограничиться (n+1)-ой цифрой], а въ дѣлимомъ такое число цифръ, чтобы дѣлитель содержался въ немъ болѣе одного и менѣе десяти разъ, т. е. (n+2) или (n+3) цифры. Если, однако, при дѣленіи, какъ и при умноженіи, принимать во вниманіе первую вычеркнутую цифру и брать ее закругленной, то ошибка, происходящая отъ сокращенія дѣленія, значительно уменьшится. Поэтому, взявъ въ дѣлителѣ n цифръ, а въ дѣлимомъ (n+1) цифру, получимъ частное, въ которомъ n-ая цифра будетъ вѣрна или же будетъ отличаться отъ истинной на одну, и рѣдко—на двѣ единицы. Послѣднее положеніе справедливо, если число цифръ, которое надо получить въ частномъ, не велико (не превосходитъ четырехъ или пяти). Вышеприведенное дѣленіе представится въ слѣд. видѣ (если въ частномъ нужно имѣть 4 вѣрныхъ цифры):

```
74329 | 8567
68536   8,676
-----
 5793
 5140
-----
  653
  600
-----
   53
```

Принимая во вниманіе, что строгая теорія приближенныхъ вычисленій даже въ томъ простѣйшемъ видѣ, который далъ ей Долгушинъ, заключаетъ цѣлый рядъ теоремъ, нельзя не согласиться съ тѣмъ, что если она и доступна въ средней школѣ, то только въ старшихъ классахъ и требуетъ значительной затраты времени. Кромѣ того, вычисленія въ большинствѣ случаевъ получаются все-таки неудобными, такъ какъ для опредѣленія числа цифръ, съ которымъ нужно взять каждый изъ компонентовъ, требуется, хотя бы грубо, предвычислить результатъ. Между тѣмъ, было бы желательно дать практику сокращенныхъ и приближенныхъ вычисленій уже съ младшихъ классовъ; только въ этомъ случаѣ учащіеся пріобрѣтутъ необходимый навыкъ и прочно усвоятъ эти знанія.

Какъ я старался подчеркнуть выше, въ результатѣ всякаго дѣйствія (кромѣ вычитанія) съ числами, имѣющими n вѣрныхъ цифръ вообще получается результатъ съ $(n-1)$ вѣрными цифрами; ошибки въ n-омъ знакѣ въ исключительныхъ случаяхъ превосходятъ двѣ или три единицы; поэтому хотя эта цифра и невѣрна, но откидывать ее не слѣдуетъ. Сохраняя же эту n-ую цифру, можно будетъ и въ результатѣ недлиннаго ряда дѣйствій (пяти или шести) получить $(n-1)$ вѣрныхъ цифръ. Все это остается справедливымъ и въ томъ случаѣ, когда пользуются сокращенными вычисленіями, если только число n не велико (не превосходитъ четырехъ или, въ крайнемъ случаѣ, пяти). Поэтому можно установить такія правила, пригодныя для школьной практики:

Если требуется вычислить нѣкоторое выраженіе и получить результатъ съ n вѣрными цифрами, то слѣдуетъ брать всѣ компоненты с $(n+1)$ знаками, произвести всѣ вычисленія, слѣдя за тѣмъ, чтобы въ результатѣ каждаго дѣйствія получалось не менѣе $(n+1)$ цифръ и въ окончательномъ результатѣ откинуть послѣдній знак. Если бы въ результатѣ какого-нибудь дѣйствія получилось $(n+1-p)$ цифръ, то слѣдуетъ увеличить въ соотвѣтствующихъ компонентахъ число знаковъ p цифрами. Это можетъ случиться толь

въ случаѣ вычитанія]. Примѣняя эти правила можно пользоваться пріемами сокращенныхъ вычисленій, принимая во вниманіе, какъ это указано выше, первую зачеркнутую цифру. При дѣленіи слѣдуетъ къ дѣлимому приписать 0, если оно получилось съ $(n+1)$ цифрами, и не уничтожать $(n+2)$-ой цифры, — въ другихъ случаяхъ $(n+2)$-ая цифра откидывается,—если таковая получилась. Въ окончательномъ результатѣ n-ая цифра будетъ вѣрна, или, въ нѣкоторыхъ рѣдкихъ случаяхъ, отличаться отъ истинной на одну или двѣ единицы, если только общее число дѣйствій не превосходитъ шести и n не превосходитъ четырехъ.

Если бы нужна была полная увѣренность въ n-ой цифрѣ или условія только-что приведенныя не были выполнены, то въ компонентахъ слѣдуетъ брать $(n+2)$ или даже $(n+3)$ цифры. Едва ли въ школьной практикѣ часто встрѣчается надобность въ этомъ. Позволяю себѣ привести вычисленіе выполненное по этимъ правиламъ. Дано вычислить $\frac{(\sqrt{2}+2{,}57812)^2}{2{,}57812}$ съ относительной ошибкой 0,001, т. е. съ четырьмя цифрами.

$$\sqrt{2}=1{,}4142\,;\,1{,}4142+2{,}5781=3{,}9923.$$

3,9923	15,9385	25781
32993	154686	6,1823
119769	4699	
35931	2578	
3593	2121	
80	2062	
12	59	
15,9385	52	
	7	

Въ данномъ примѣрѣ всѣ четыре цифры результата 6,182 вѣрны. [Примѣръ этотъ приведенъ у Fassbinder'a «Théorie et

pratique des approximations numériques» и Долгушина „Вычисленія по приближенію»].

Если бы требовалось вычислить $\frac{\sqrt{650}+\sqrt{0,02}}{\pi-2,22\sqrt{2}}$ съ двумя цифрами, то пришлось бы взять π и $\sqrt{2}$ съ шестью цифрами. т. к. при вычитаніи первыя три цифры равны нулю; [конечно $\sqrt{0,02}$ достаточно взять съ одной цифрой]. Вычисленія слѣдующія:

$\sqrt{2}=1,41421.$

1,41421	3,14159
222	3,13954
282842	0,00205
28284	
2828	
3.13954	

$\sqrt{650}$ 25,5 $\sqrt{0,02}=0,1$

25,5	2560	205
+ 0,1	205	12500
25,6	510	
	410	
	100	

Слѣд., результатъ 12000 или 13000. [Истинный результатъ нѣсколько ближе къ 13000].

Я думаю, что только такую простую схему приближенныхъ и сокращенныхъ вычисленій, какъ предлагаемая мною, можно дать въ средней школѣ безъ значительной затраты времени, причемъ эту схему можно дать уже въ среднихъ классахъ гимназій. Этимъ достигается то преимущество, что нѣтъ надобности брать задачи съ подобранными числами. Если же въ старшихъ классахъ есть время и если теоріи приближенныхъ вычисленій придается большое образовательное значеніе, и таковая будетъ проходиться, то предварительное практическое ознакомленіе будетъ во всякомъ случаѣ не безполезно.

Уже въ первомъ классѣ слѣдуетъ дать идею приближеннаго измѣренія, объяснить и показать, что всякое измѣреніе производится приближенно; при чемъ хорошо на практиче-

скихъ примѣрахъ указать точность измѣренія. Здѣсь обнаружится нецѣлесообразность задачъ, въ которыхъ даны очень сложныя составныя именованныя числа, напр. числа, содержащія берковцы и доли.

Во второмъ классѣ полезно вмѣсто ученія о періодическихъ дробяхъ указать ученикамъ, какъ замѣнить обыкновенную дробь конечной десятичной съ какой угодно степенью точности. Тутъ же можно выяснить предѣлъ ошибки, которую дѣлаютъ при *закругленіи* чиселъ. На нѣсколькихъ примѣрахъ слѣдуетъ указать границы, между которыми заключаются результаты дѣйствій съ двумя или нѣсколькими неточными компонентами. Послѣ того, какъ учениками хорошо усвоены дѣйствія надъ десятичными дробями, полезно пріучить ихъ отдѣлять въ результатѣ дробную часть, не отсчитывая каждый разъ числа десятичныхъ знаковъ въ компонентахъ; такое умѣніе, полезное вообще, оказывается почти необходимымъ при сокращенныхъ вычисленіяхъ.

Методы сокращеннаго умноженія и дѣленія, которыми ученики вообще очень интересуются, настолько просты, что могутъ быть пройдены уже въ третьемъ классѣ. Въ четвертомъ или пятомъ могутъ быть даны правила, приведенныя выше. Теорія приближенныхъ вычисленій едва ли умѣстна ранѣе шестого класса. По ознакомленіи съ теоріей, на рядѣ примѣровъ можетъ быть показана справедливость приведенныхъ правилъ.

Правила, предложенныя мною, не представляютъ чего-нибудь существенно новаго. Указанія этого рода есть у проф. Ермакова. Онъ заканчиваетъ брошюру слѣдующимъ замѣчаніемъ: чтобы при умноженіи и дѣленіи приближенныхъ чиселъ получить результатъ съ даннымъ числомъ значащихъ цифръ, нужно въ каждомъ изъ данныхъ чиселъ удержать лишнюю цифру; въ окончательномъ результатѣ лишняя цифра откидывается. Это правило приводится *только между прочимъ*, хотя оно не менѣе строго и не менѣе удобно, чѣмъ основное правило, приведенное имъ ранѣе. Наконецъ, Tripard въ Revue de l'Enseignement des sciences за 1909 г. (№ 3) и въ отдѣльной брошюрѣ приводитъ приблизительно тотъ же самый методъ, какъ

предлагаемый мною, не пользуясь однако сокращенными вычисленіями. Онъ замѣчаетъ при этомъ: «я привожу этотъ методъ, какъ чисто экспериментальный, и утверждаю, что только въ какихъ-нибудь совершенно исключительныхъ случаяхъ онъ можетъ привести къ неправильному результату».

Тезисы.

Умѣніе вычислять заключается въ умѣніи быстро и вѣрно получить требуемый численный результатъ; то и другое одинаково важно.

I. Для быстраго полученія результата необходима простота вычисленій; эта простота достигается методами сокращенныхъ вычисленій.

II. Для полученія вѣрнаго результата необходимо умѣніе опредѣлять, на которыя цифры результата можно положиться, основанія теоріи приближенныхъ вычисленій даютъ правила, необходимыя для этого.

Такъ какъ средняя школа должна научить вычислять, то методы сокращенныхъ и приближенныхъ вычисленій должны быть введены въ курсъ средней школы.

Въ виду практическаго значенія приближенія при всякомъ измѣреніи, ознакомленіе съ приближенными вычисленіями слѣдуетъ начинать рано и проводить затѣмъ, постепенно развивая, черезъ весь курсъ средней школы, обращая особенное вниманіе на нихъ при вычисленіи опытныхъ данныхъ.

Вслѣдствіе трудности строгой и полной теоріи приближенныхъ вычисленій и разнообразія случаевъ, встрѣчающихся въ задачахъ, для осуществимости проведенія этихъ вычисленій въ курсъ средней школы необходимо дать простыя, удобныя практическія правила, пригодныя для всѣхъ случаевъ; при этомъ желательно также указать теоретическія обоснованія этихъ правилъ.

Если приближенныя и сокращенныя вычисленія будутъ введены въ курсъ средней школы, то всѣ задачи съ подобранными числами должны быть выброшены.

Литература

вопроса о сокращенныхъ и приближенныхъ элементарныхъ вычисленіяхъ.

(Приложеніе къ докладу В. А. Крогіуса).

A. Cauchy. (C. R. des séances de l'Académie des Sciences de Paris).
Serret. Traité d'Arithmétique. 1887.
Lüroth. Vorlesungen über numerisches Rechnen.
Tannery. Leçons d'arithmétique. 1900.
Ch. Galopin-Schaub. Théorie des approximations numériques. 1881
Ruchonnet. Eléments de calcul approximatif. 1887.
Guyou. Note sur les approximations numériques. 1891.
Griess. Approximations numériques. 1898.
Fassbinder. Théorie et pratique des approximations numériques 1906
Langley. A. Treatise on computation. 1895.
Lambert. Computation and Mesurations. 1907.
Xavier. Théorie des approximations numériques et du calcul abrégé. 1909
Vieille. Théorie générale des approximations numériques. 1851
Tripard. Méthode pratique de calcul approximatif. 1899.
Tripard. (Revue de l'enseignement des sciences. 1909. Mars).
Соколовъ. Вычисленіе формулъ по данному приближенію. 1898.
Гончаровъ. Приближенныя вычисленія. 1905.
Ермаковъ. Приближенное вычисленіе. 1905.
Долгушинъ. Вычисленія по приближенію. 1908.
Филипповъ. Теорія и практика элементарныхъ приближенныхъ вычисленій. 1909.

Пренія по докладу В. А. Крогіуса.

П. А. Долгушинъ (Кіевъ). „Идея приближеннаго вычисленія очень проста. Возможно знакомить съ такимъ вычисленіемъ и въ низшихъ классахъ средней школы, и даже въ городскихъ училищахъ. Сужденіе о точности результата можно основывать на простомъ понятіи объ измѣняемости результатовъ дѣйствія при измѣненіи компонентовъ. Можно также дать простое правило при рѣшеніи обратной задачи—опредѣленія числа точныхъ цифръ въ компонентахъ для полученія результата съ заданной точностью (см. П. Долгушинъ—«Вычисленія по приближенію», изд. II, 1912 г. § 15)".

VI. Объ алгебраическихъ преобразованіяхъ.

Докладъ Д. М. Левитуса (Спб.).

«Цѣль моего доклада—разобраться въ вопросахъ: какова роль алгебраическихъ преобразованій въ школѣ? Въ чемъ недостатки обычнаго способа ихъ изученія? Каковы должны быть пріемы этого изученія?

Всякій вопросъ, подлежащій математическому разрѣшенію заставляетъ преодолѣть слѣдующія трудности: 1) отыскать зависимость между данными величинами; 2) выразить эту зависимость на языкѣ математическихъ символовъ; обѣ эти трудности могутъ быть преодолѣны учащимся, если у него было достаточно развиты интуитивное чувство функціональной зависимости на первыхъ ступеняхъ обученія и пріемы оформленія этой зависимости—на среднихъ ступеняхъ.

Еще одна трудность состоитъ въ слѣдующемъ: найдя зависимость и выразивъ ее символически, надо подвергнуть полученную математическую фразу спеціальной обработкѣ для полученія рѣшенія вопроса. Преодолѣніе послѣдней трудности и требуетъ умѣнія оперировать надъ алгебраическими выраженіями. Съ этой точки зрѣнія, алгебраическія преобразованія являются инструментомъ, вѣрнѣе—необходимымъ наборомъ инструментовъ для математической обработки математическаго матеріала.

Такова роль алгебраическихъ преобразованій въ математикѣ. Ту же роль они должны, конечно, играть и въ школѣ. Но въ школѣ изученіе преобразованій, сверхъ того, должно играть еще другую роль, не менѣе важную, а съ воспитательной точки зрѣнія, быть можетъ, и болѣе важную: всякое алгебраическое преобразованіе основано на логически обоснованномъ использованіи нѣкоторыхъ общихъ положеній. Изучая каждое новое преобразованіе, учащійся упражняется, если въ умѣніи строго логически мыслить,—на первыхъ порахъ это не удается,—то, во всякомъ случаѣ, въ умѣніи правильно разсуждать. Оперируя надъ абстрактнымъ матеріаломъ, тѣмъ

менѣе вполнѣ доступнымъ по легкости, ученикъ на задачахъ алгебры постепенно подготовится и къ болѣе труднымъ для него геометрическимъ абстракціямъ. Эта логическая сторона дѣла чрезвычайно важна.

Если бы преобразованія вводились въ школу только какъ матеріалъ для логическихъ упражненій, то отъ учениковъ не надо было бы требовать умѣнія справляться съ преобразованіями, даже несложными.

Достаточно было бы показать, доказать, пояснить нѣсколькими примѣрами и итти дальше. Но разъ преобразованія являются, сверхъ того, практически необходимымъ «наборомъ инструментовъ», то надо научить будущихъ мастеровъ пользоваться этимъ наборомъ. Понимать и умѣть—различныя вещи. Школа должна дать и то, и другое.

Но умѣніе свободно обращаться съ инструментомъ требуетъ большого навыка, большой практики. На это нужно время. Гдѣ его взять?

На этотъ вопросъ я отвѣчаю, какъ учитель-практикъ. Есть вещи необходимыя и есть только желательныя. Конечно, желательно, чтобы ученикъ зналъ возможно больше. Но еще болѣе желательно, даже необходимо, чтобы онъ зналъ хоть не такъ много, но возможно лучше. Пусть каждый изъ Васъ скажетъ себѣ: не излишни-ли многія упражненія, практикуемыя въ школѣ? Отказъ отъ сложныхъ задачъ дастъ время основательно проработать болѣе простыя. Тѣмъ болѣе, что сложныя задачи не достигаютъ цѣли. Прежде всего—по недостатку времени и по причинѣ слѣпого подчиненія существующимъ учебнымъ планамъ—приходится весьма обширный матеріалъ преобразованій проходить очень быстро въ какіе-нибудь 2 года (3-й и 4-й классы). Ученики не успѣваютъ освоиться съ матеріаломъ, и даже тѣ сложныя задачи, которыя имѣли бы смыслъ по существу, изъ-за этого проходятъ мимо учениковъ въ лучшемъ случаѣ безслѣдно, а въ худшемъ—вызывая отвращеніе къ математикѣ.

Къ концу курса 5-го класса гимназій ученіе о преобразованіяхъ считается законченнымъ. Но я беру на себя смѣлость утверждать, что по окончаніи пяти классовъ учащійся

преобразованіями не владѣетъ и ихъ не понимаетъ—за нѣкоторыми, конечно, исключеніями. Развѣ не изъ-за этого получается столь большой процентъ учениковъ, слабыхъ въ алгебрѣ? А въ результатѣ—такъ называемыя, привычныя ошибки учениковъ старшихъ классовъ.

Результаты, которыхъ достигаетъ школа по части умѣнія учениковъ выполнять алгебраическія преобразованія, мнѣ кажутся скудными по сравненію съ количествомъ труда, затраченнаго учениками. А если однимъ изъ этихъ результатовъ является непріязненное отношеніе къ математикѣ, то такіе результаты надо признать весьма плачевными.

Періодъ изученія преобразованій долженъ быть значительно увеличенъ. Нѣкоторыя болѣе сложныя преобразованія могутъ впервые изучаться даже въ послѣднемъ классѣ. Весь матеріалъ долженъ быть перераспредѣленъ съ методическихъ точекъ зрѣнія. Упражненія, продѣлываемыя учениками, должны рѣзко распадаться на два типа: первый типъ—упражненія, предшествующія или сопутствующія изученію матеріала. Ихъ отличительною чертою должна быть крайняя простота, чтобы техническія трудности были несравнимо ниже трудностей логическихъ. Что же касается послѣднихъ, то и онѣ должны увеличиваться лишь въ строгой и осторожной постепенности.

Упражненія, преслѣдующія усвоеніе новаго матеріала, не должны одновременно служить другимъ цѣлямъ: это усложнитъ ихъ, а потому сдѣлаетъ ихъ для главной цѣли мало пригодными.

Второй типъ упражненій, по моему плану, долженъ преслѣдовать цѣли укрѣпленія изученнаго и развитія, какъ техники отдѣльныхъ простыхъ преобразованій, такъ и умѣнія оріентироваться въ болѣе сложныхъ комбинаціяхъ.

Но какъ этого достичь? Вѣдь тотъ весьма значительный трудъ, котораго требуютъ теперь отъ учениковъ въ области алгебраическихъ преобразованій, имѣетъ ввиду не что иное, какъ развитіе техники преобразованій.

Каждый изъ насъ знаетъ, какъ достигается бѣглость при игрѣ на музыкальномъ инструментѣ. Развитіе техники алге-

браическихъ преобразованій можетъ быть достигнуто тѣми же средствами: надо избрать путь ежедневныхъ или, хотя бы, болѣе рѣдкихъ, но регулярно выполняемыхъ особыхъ упражненій, такъ сказать, математическихъ гаммъ, математическихъ этюдовъ.

Особый задачникъ, который я назвалъ бы «задачникомъ на каждый день», рисуется мнѣ въ такомъ видѣ: на каждый день ученикъ продѣлываетъ небольшой циклъ задачъ на преобразованія (сюда я отношу и рѣшеніе уравненій), отнимающій отъ 5 до 10 минутъ. Такой циклъ долженъ быть вполнѣ законченъ. Начиная съ очень простой темы, постепенно развивать ее въ какое-нибудь сложное преобразованіе.

Вотъ примѣръ нѣсколькихъ цикловъ задачъ, начинающихся съ одного и того же образованія, служащаго темою:

1) отъ примѣненія формулы для $(a+b)^2$ перейти къ вычисленію квадратовъ двузначныхъ чиселъ типа 31, 79 и т. д.

2) Отъ той-же формулы перейти къ формулѣ для $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ и т. д.

3) Отъ той же формулы—къ формулѣ возведенія многочлена въ квадратъ.

4) Отъ той же формулы—къ разложенію квадр. трехчлена на линейныхъ множителей, и т. д.

Но недостаточно только сдѣлать работу. Надо умѣть выполнять ее изящно. И при обученіи математикѣ нельзя упускать изъ виду эстетическаго элемента. А чтобы научить ученика изящнымъ пріемамъ преобразованій, надо развивать въ немъ чувство изящнаго и на урокахъ математики; надо знакомить его съ изящными классическими примѣрами преобразованій.

Интересно отмѣтить слѣдующее: всѣ изящныя преобразованія—крайне просты. Всѣ важнѣйшія преобразованія, встрѣчающіяся въ высшемъ курсѣ математики—просты и изящны.

Только простой матеріалъ для упражненій научитъ учениковъ владѣть каждымъ инструментомъ и умѣть выбрать изъ своего набора инструментовъ тотъ, который наиболѣе пригоденъ для предстоящей работы.

Въ связи съ вышеизложеннымъ позволяю себѣ особенно

обратить ваше вниманіе на то зло, которое проистекаетъ отъ столь распространенныхъ такъ называемыхъ—привычныхъ ученическихъ ошибокъ.

Господа! Такихъ привычныхъ ошибокъ масса. По условіямъ своей работы, я имѣлъ возможность, несмотря на короткій пятилѣтній періодъ своей педагогической дѣятельности, ознакомиться съ познаніями нѣсколькихъ тысячъ молодыхъ людей

Много сотенъ ежегодно отпадаетъ отъ средней школы изъ-за неуспѣшности въ математикѣ; много народу пропадаетъ для работы, такъ или иначе связанной съ математикою.

Надо помочь тѣмъ, кто отсталъ отъ товарищей не по одной только своей небрежности. Чтобы избавить нашихъ учениковъ отъ привычныхъ ошибокъ, нужны особыя мѣры.

Учитель старшихъ классовъ не можетъ удѣлять такимъ отставшимъ ученикамъ особаго времени: у него каждая минута на счету. Надѣяться на репетиторовъ нельзя.

Вопросу о привычныхъ ученическихъ ошибкахъ должны быть посвящены особые труды, составлены особые, такъ сказать, цѣлительные задачники. Я предполагаю въ ближайшемъ времени начать разработку именно этого вопроса, и очень прошу всѣхъ, кто сочувствуетъ такому моему начинанію, подѣлиться со мною матеріалами, присылая ихъ на мое имя сюда, въ Педагогическій Музей военно-учебныхъ заведеній».

Тезисы.

Преобразованія—одинъ изъ важнѣйшихъ инструментовъ математическаго изслѣдованія. Учить преобразованіямъ необходимо такъ, чтобы изучившій ихъ въ совершенствѣ владѣлъ этимъ инструментомъ при производствѣ несложныхъ операцій. Обученіе преобразованіямъ возможно лишь путемъ долгихъ систематическихъ упражненій. Поэтому, съ цѣлью экономіи времени, необходимо сократить объемъ изучаемыхъ преобразованій. Критерій при рѣшеніи вопроса о томъ, что́ нужно и что́ ненужно, могъ-бы быть такой: преобразованія, съ которыми не приходится имѣть дѣла на математическомъ факультетѣ уни-

верситета, спокойно могутъ быть *исключены* изъ программы средней школы.

Метода обученія преобразованіямъ должна быть основана на долгихъ упражненіяхъ надъ простымъ и прозрачнымъ матеріаломъ. Искусственно запутаннымъ примѣрамъ не должно отводиться никакого мѣста въ школѣ.

Полезно было-бы созданіе особаго сборника упражненій «на каждый день», который имѣлъ-бы ввиду развитіе техники преобразованій.

При плохомъ изученіи преобразованій въ среднихъ классахъ ученики старшихъ классовъ часто допускаютъ ошибки. Необходимо изучить эти привычныя ошибки и создать особый сборникъ упражненій, котораго цѣлью было-бы искорененіе этихъ ошибокъ у учениковъ старшихъ классовъ. Докладчикъ проситъ доставлять ему матеріалы по вопросу о привычныхъ ошибкахъ.

Третье засѣданіе.

29 декабря, 8 час. веч.

VII. Спорные вопросы въ методикѣ ариѳметики.

Докладъ Ѳ. А. Эрна (Рига).

«Было время, когда методика ариѳметики считалась *вполнѣ опредѣлившейся дисциплиной*, когда Калласъ въ предисловіи къ своей «Методикѣ элементарнаго обученія ариѳметикѣ» утверждалъ, что «методика начальной ариѳметики является основнымъ и наиболѣе блестящимъ предметомъ въ курсѣ учительскихъ семинарій, что на такую высоту вознесли ее труды нѣмецкихъ методистовъ, начиная съ Песталоцци и кончая Генчелемъ, что предметъ этотъ по своему объему и содержанію вполнѣ законченъ, и что дальше по пути, указанному Генчелемъ и его предшественниками, итти некуда и незачѣмъ.

Въ настоящее время врядъ-ли кто-либо изъ преподавателей ариѳметики согласится съ этимъ взглядомъ Калласа; гораздо больше приверженцевъ окажется, вѣроятно, у мнѣнія, высказаннаго почти одновременно съ Калласомъ, извѣстнымъ методистомъ Беетцомъ, согласно которому, «выборъ и распредѣленіе матеріала, самое изложеніе, однимъ словомъ, вся метода обученія ариѳметикѣ не представляетъ собою ничего единаго и однообразнаго; каждому взгляду противопоставляется другой, прямо противоположный; противорѣчіе царитъ въ самыхъ простыхъ вопросахъ».

И въ самомъ дѣлѣ: *нельзя-же* современную методику ариѳметики признавать вполнѣ опредѣлившейся дисциплиной,

разъ такіе кардинальные вопросы, какъ вопросы о цѣли преподаванія ариѳметики въ школѣ, объ объемѣ и характерѣ курса, наконецъ, о методахъ и пріемахъ обученія, все еще недостаточно выяснены и рѣшаются современными методистами часто въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ.

Но, соглашаясь вполнѣ съ мнѣніемъ Беетца о недостаточномъ развитіи методики ариѳметики, нужно вмѣстѣ съ тѣмъ отнестись въ высшей степени осторожно къ объясненію причинъ этого явленія. Какъ извѣстно, въ своей брошюрѣ «Сущность числа» Беетцъ объясняетъ существованіе противорѣчій и спорныхъ вопросовъ въ методикѣ ариѳметики тѣмъ обстоятельствомъ, что все ученіе о преподаваніи ариѳметики не объединено одной идеей, что оно не покоится на одномъ основномъ принципѣ, изъ котораго всѣ методическія положенія могли-бы быть выведены чисто-дедуктивнымъ путемъ.

Насколько правиленъ этотъ взглядъ о необходимости дедуктивнаго, чисто теоретическаго построенія методики ариѳметики, можно будетъ судить лишь послѣ болѣе подробнаго изслѣдованія характера тѣхъ спорныхъ вопросовъ и противорѣчій, которые въ настоящее время бросаются въ глаза еще рѣзче, чѣмъ 20 лѣтъ тому назадъ.

Какъ только-что было указано, спорные вопросы возникаютъ сразу при опредѣленіи цѣли преподаванія ариѳметики. Разумѣется, чистыхъ Песталоцціанцевъ, смотрящихъ на ариѳметику и математику вообще только какъ на прикладную логику и признающихъ исключительно формальныя цѣли преподаванія ариѳметики, въ настоящее время уже почти не встрѣчается; но все же въ пониманіи цѣли и задачъ обученія ариѳметикѣ мы наблюдаемъ очень существенныя разногласія. Въ то время, какъ одни методисты не признаютъ за обученіемъ ариѳметикѣ почти никакого развивающаго значенія и отрицаютъ, какъ будто, по крайней мѣрѣ, на первыхъ порахъ обученія, формальныя цѣли, другіе лишь отодвигаютъ формальное развитіе учащихся на задній планъ и подчиняютъ формальныя цѣли матеріальной. При этомъ большинство методистовъ послѣдней категоріи стараются связать ариѳметику какъ можно прочнѣе съ жизнью или съ другими предметами преподаванія,

придать ей, такимъ образомъ, прикладной характеръ. Но при рѣшеніи вопроса, что понимать подъ прикладнымъ характеромъ, снова возникаютъ разногласія и выдвигаются различныя точки зрѣнія. Д-ръ Гартманъ, д-ръ Рейнъ и другіе представители Гербартъ-Циллеровской школы видятъ все спасеніе въ расположеніи учебнаго матеріала по, такъ называемымъ, «предметнымъ областямъ» (Sachgebiete). При этомъ они руководятся исключительно интересомъ учащихся и ихъ «кругомъ представленій», по мѣрѣ расширенія котораго, расширяется и матеріалъ, разрабатываемый на урокахъ ариѳметики. Центромъ тяжести такого курса является практическое ознакомленіе учащихся съ мѣрами и монетами и простѣйшими, доступными дѣтскому пониманію, случаями измѣренія и вычисленія стоимости при покупкѣ и продажѣ различныхъ предметовъ. Другіе методисты, *желая придать ариѳметикѣ прикладной характеръ, превращаютъ* ее въ рѣшеніе задачъ—иногда очень сложныхъ и трудныхъ—на коммерческія и финансовыя вычисленія. Третьи стараются установить возможно прочную связь между ариѳметикой и геометріей, причемъ иногда эта связь оказывается настолько неразрывной, что ариѳметика теряетъ совсѣмъ характеръ самостоятельнаго учебнаго предмета и является лишь средствомъ для изслѣдованія числовыхъ отношеній въ геометрическихъ вопросахъ.

Новѣйшее «реформистское» направленіе въ методикѣ ариѳметики тоже всецѣло подчиняетъ формальную цѣль матеріальной и полагаетъ, что обученіе, которое съ самаго начала поставитъ себѣ цѣлью побудить ученика къ усвоенію извѣстнаго математическаго матеріала, можетъ спокойно ожидать тѣхъ побочныхъ формально-развивающихъ результатовъ, которые должны явиться слѣдствіемъ такого обученія (Алоизіи Гёфлеръ). Эти реформаторы въ качествѣ звена, связующаго ариѳметику съ жизнью—вообще, а съ наукой и техникой—въ особенности, усиленно рекомендуютъ усвоеніе учащимися идеи функціональной зависимости и воспитанія въ нихъ навыка къ мышленію въ области функціи (functionales Denken). (См. Меранскую программу). Разумѣется, надлежащее пониманіе функціи и ихъ значенія въ математикѣ возможно только въ старшихъ

классахъ средней школы, но, по мнѣнію многихъ методистовъ, уже средніе и даже младшіе классы средней школы даютъ достаточно матеріала для подготовки учащихся къ усвоенію идеи фунціональной зависимости. Въ области ариѳметики въ этомъ отношеніи большое значеніе могло-бы имѣть умѣлое и своевременное выясненіе учащимся понятія о прямой и обратной пропорціональности величинъ, сопровождаемое указаніемъ тѣхъ случаевъ, когда между величинами существуетъ болѣе сложная зависимость. Эти зависимости должны наглядно демонстрироваться путемъ черченія различныхъ графиковъ. Это стремленіе подготовить учащихся уже на первыхъ ступеняхъ обученія къ пониманію функціональной зависимости проникло въ послѣдніе годы и въ русскую учебную литературу. Появившаяся недавно методика ариѳметики г. Галанина отводитъ этому вопросу видное мѣсто даже въ первомъ году обученія. Здѣсь идея прямой пропорціональности выясняется дѣтямъ при помощи опредѣленія измѣненій въ вѣсѣ, объемѣ, стоимости различныхъ предметовъ, путемъ фактическаго измѣренія и вычисленія, производимыхъ самими учениками. Авторы извѣстной книги «Педагогика математики», г.г. Мрочекъ и Филиповичъ, указываютъ на изслѣдованія свойствъ членовъ ариѳметическихъ дѣйствій и даже на составленіе такъ называемыхъ волшебныхъ квадратовъ, какъ на упражненія, способствующія выясненію функціональной зависимости.

Но, конечно, и здѣсь возможны увлеченія, и увлеченія очень вредныя. Знатокъ нѣмецкой методики, проф. Гёфлеръ, вполнѣ раздѣляя въ общемъ взгляды, высказанные въ Меранской программѣ, въ тоже время настойчиво совѣтуетъ не спѣшить съ выясненіемъ функціональной зависимости и не навязывать дѣтямъ въ курсѣ ариѳметики понятій и идей, имъ недоступныхъ. И здѣсь, какъ вездѣ въ ариѳметикѣ, мышленіе въ области функцій должно опираться на наблюденіе и опытъ надъ измѣняемостью перемѣнныхъ; поэтому онъ строго различаетъ «functionales Denken» отъ «functionales Anschauen».

Если, такимъ образомъ, нельзя считать вполнѣ рѣшеннымъ вопросъ о дѣлѣ преподаванія ариѳметики, то объемъ курса

ариѳметики и его характеръ вызываютъ еще больше разногласій между современными методистами.—Очень много спорныхъ вопросовъ возникаетъ въ самомъ началѣ обученія, вслѣдствіе противорѣчивыхъ взглядовъ на сущность и природу числа. Въ Германіи, какъ извѣстно, чуть не сто лѣтъ идетъ борьба между сторонниками теоріи счета и теоріи непосредственнаго воспріятія числа или числовыхъ представленій. Послѣдніе полагаютъ, что понятіе о числѣ возникаетъ опытнымъ путемъ, причемъ главную роль играетъ наблюденіе, при помощи органовъ внѣшнихъ чувствъ, небольшихъ совокупностей или группъ предметовъ, сравненіе ихъ между собой и т. д. Понятіе о числѣ будетъ отчетливымъ и яснымъ, когда отдѣльныя единицы, входящія въ составъ его, будутъ выдѣлены, такъ называемымъ, постулированіемъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ всѣ эти единицы будутъ мыслиться, какъ одно цѣлое. Но постулированіе это совершается, будто-бы, безъ всякаго участія счета, лишь путемъ всесторонняго наблюденія совокупности. Представители другого направленія полагаютъ, что понятіе о числѣ есть результатъ особаго психическаго акта, называемаго счетомъ; только путемъ наблюденія это понятіе не можетъ возникнуть, такъ какъ наблюдать и представлять мы можемъ только конкретныя совокупности, а не число. Поэтому для сторонниковъ теоріи счета каждое число есть не отдѣльная группа единицъ, совмѣстно и единовременно воспринимаемыхъ нами путемъ наблюденія, а тотъ или другой членъ цѣлаго ряда, изъ которыхъ каждый послѣдующій получается изъ предыдущаго путемъ прибавленія къ нему одной единицы. У насъ въ Россіи почти всѣ методисты были сторонниками теоріи счета; но за послѣдніе годы послѣ появленія сочиненій д-ра Лайя, виднаго представителя теоріи непосредственнаго воспріятія числа, и у насъ появились послѣдователи этой теоріи.

Само собой разумѣется, что разногласіе во взглядахъ на сущность и возникновеніе числа вызываетъ разногласіе въ построеніи всего курса ариѳметики и въ пріемахъ преподаванія на первыхъ-же ступеняхъ обученія. Спорнымъ является, напр., вопросъ о значеніи и характерѣ наглядныхъ пособій. Для

сторонниковъ теоріи счета важно научить учениковъ, какъ можно скорѣе, считать вѣрно и сознательно; этому можно научить на какихъ угодно предметахъ, располагаемыхъ въ рядъ, поэтому для методистовъ этого направленія видъ и форма наглядныхъ пособій не играетъ большой роли. Для представителей теоріи непосредственнаго воспріятія важенъ не счетъ, а то впечатлѣніе, которое производитъ извѣстная группа предметовъ на внѣшніе органы учащихся; поэтому у нихъ излюбленными наглядными пособіями являются, такъ называемыя, числовыя фигуры, въ видѣ-ли группъ точекъ или кружочковъ, расположенныхъ совершенно опредѣленнымъ образомъ, или въ видѣ такихъ-же группъ шаровъ (счетный приборъ д-ра Лайя).

Различно рѣшается и вопросъ о томъ, когда слѣдуетъ ознакомить учащихся съ цифрами. Для сторонниковъ теоріи непосредственнаго воспріятія числа важно продержать дѣтей, какъ можно дольше, на наблюденіи и изученіи реальныхъ совокупностей или числовыхъ фигуръ. Всякій символъ, условно обозначающій то или другое число, съ ихъ точки зрѣнія, прерываетъ тотъ правильный и послѣдовательный ходъ работы, который совершается въ сознаніи дѣтей при изученіи числовыхъ фигуръ, вноситъ въ эту работу новый элементъ, чуждый наглядности, требующій извѣстнаго навыка въ отвлеченномъ мышленіи. Поэтому многіе методисты этой школы отодвигаютъ знакомство съ цифрами до болѣе поздняго времени. Сторонники теоріи счета не боятся вводить цифры въ самомъ началѣ обученія, потому что не боятся символистики вообще; такъ какъ для нихъ центръ тяжести всего обученія лежитъ въ счетѣ, а счетъ основанъ на твердомъ знаніи порядка названій чиселъ натуральнаго рода, то имъ, все равно, приходится пользоваться символами: самыя числительныя имена являются, вѣдь, такими-же символами, только условно замѣняющими числа. Наконецъ, при переходѣ къ ариѳметическимъ дѣйствіямъ разница между построеніемъ курса становится еще болѣе замѣтной. Послѣдователи теоріи счета кладутъ счетъ и въ основу производства всѣхъ дѣйствій; результаты этихъ дѣйствій они находятъ путемъ присчитыванія или отсчитыванія

единицами или группами единицъ; поэтому они тотчасъ послѣ усвоенія счета переходятъ къ, такъ называемому, изученію дѣйствій по тому или другому плану. Совершенно иначе обстоитъ дѣло сторонниковъ другой теоріи. Имъ тоже приходится встрѣчаться съ ариѳметическими дѣйствіями въ самомъ началѣ обученія Имъ нужно, вѣдь, прежде всего выработать въ учащихся отчетливое понятіе (или даже представленіе) о каждомъ числѣ путемъ сравненія различныхъ чиселъ между собою; для этого нужно выяснить составъ числа изъ слагаемыхъ или множителей, а для этого нужно производить ариѳметическія дѣйствія Такимъ образомъ, здѣсь ариѳметическія дѣйствія важны не сами по себѣ; они являются лишь средствомъ для изученія состава чиселъ изъ слагаемыхъ и множителей. Поэтому въ основѣ курса методистовъ этого направленія лежитъ не изученіе дѣйствій, а, такъ, называемое изученіе чиселъ.

Впрочемъ, въ области ариѳметическихъ дѣйствій встрѣчается много спорныхъ, съ методической точки зрѣнія, вопросовъ и независимо отъ различія въ пониманіи сущности числа. Прежде всего, вѣдь, до сихъ поръ не установлено точно число ариѳметическихъ дѣйствій. Правда, средневѣковыя удвоеніе и дѣленіе пополамъ канули въ вѣчность, но и до сихъ поръ многіе нѣмецкіе методисты признаютъ за самостоятельныя ариѳметическія дѣйствія нѣкоторые виды и особые случаи вычитанія и дѣленія, какъ-то: сравненіе, различеніе, измѣреніе и т. д. Много разногласій возбуждаютъ и вопросы о порядкѣ и *послѣдовательности въ изученіи дѣйствій и о пріемахъ выясненія* самой сущности этихъ дѣйствій. Одни считаютъ нужнымъ *познакомить* дѣтей сразу со всѣми случаями примѣненія того или другого дѣйствія, другіе рекомендуютъ въ этомъ отношеніи строгую постепенность и послѣдовательность, третьи думаютъ, что нѣкоторые виды дѣйствій совсѣмъ не подлежатъ разсмотрѣнію въ элементарномъ курсѣ; одни считаютъ, напр.. дѣленіе на равныя части болѣе простымъ и доступнымъ дѣтскому пониманію видомъ дѣленія, чѣмъ кратное сравненіе, другіе, наоборотъ, предлагаютъ начинать именно съ дѣленія по содержанію, третьи стараются убѣдить, что всякіе «виды» дѣленія только путаютъ и затрудняютъ дѣтей и что гораздо

проще выяснить общее понятіе о дѣленіи, какъ о дѣйствіи, обратномъ умноженію; далѣе, одни находятъ возможнымъ уже на первой ступени обученія ознакомить дѣтей со всѣми четырьмя дѣйствіями, другіе отодвигаютъ изученіе умноженія и дѣленія на болѣе позднее время, а при изученіи дѣйствій въ предѣлѣ перваго десятка ограничиваются сложеніемъ и вычитаніемъ.

Наконецъ, и пріемы изученія производства дѣйствій нельзя считать опредѣленно установленными. Знакомить-ли дѣтей съ однимъ какимъ-либо способомъ производства дѣйствія или съ различными? Производить-ли вычитаніе при помощи отсчитыванія или досчитыванія?

Какіе пріемы сокращеннаго производства дѣйствій должны быть усвоены учащимися?

Эти и многіе другіе вопросы изъ той-же области до сихъ поръ рѣшаются методистами различно.

Но, конечно, разногласія и противорѣчія проявляются не только въ области изученія ариѳметическихъ дѣйствій. Ихъ можно констатировать и въ любомъ отдѣлѣ современной ариѳметики. Рѣшеніе задачъ, напр., огромнымъ большинствомъ методистовъ признается центромъ тяжести всей элементарной ариѳметики, а между тѣмъ, въ вопросахъ о выборѣ задачъ, о пріемахъ ихъ рѣшенія, даже о роли задачъ въ курсѣ ариѳметики есть много невыясненнаго, спорнаго, неопредѣлившагося. Взять хотя бы вопросъ о такъ называемомъ, распредѣленіи задачъ по типамъ. Во многихъ сборникахъ задачъ новѣйшаго происхожденія такое расположеніе задачъ усиленно рекомендуется и какихъ только, подчасъ въ высшей степени странныхъ, типовъ здѣсь не встрѣчается. Съ другой стороны, многіе видные методисты энергично высказываются противъ рѣшенія задачъ по типамъ, такъ какъ такое рѣшеніе пріучаетъ дѣтей къ пользованію шаблономъ и возвращаетъ насъ почти въ обстановку средневѣковой школы съ ея задачами на ложное дѣленіе и пр. правила. Къ типичнымъ задачамъ близко примыкаютъ задачи, такъ называемаго алгебраическаго характера. И въ этой области тоже достаточно спорныхъ пунктовъ. Прежде всего не установлены точно признаки, по которымъ задачи алгебраическаго харак-

тера отличаются отъ чисто-ариѳметическихъ. Затѣмъ далеко не одинаково оцѣнивается и роль этихъ задачъ въ курсѣ ариѳметики. Большинство методистовъ, принимая во вниманіе искусственность задачъ алгебраическаго характера, ихъ оторванность отъ жизни, предлагаетъ совсѣмъ исключить ихъ изъ курса ариѳметики и перенести въ курсъ алгебры, тѣмъ болѣе что составленіемъ уравненій задачи этого рода рѣшаются гораздо проще, чѣмъ искусственнымъ ариѳметическимъ путемъ. Съ другой стороны, однако, именно за послѣднее время начинаютъ въ большомъ количествѣ появляться сборники задачъ алгебраическаго характера или задачъ-загадокъ, требующихъ для своего рѣшенія особаго рода сметливости или соображенія. Наконецъ, и пріемы рѣшенія сложныхъ ариѳметическихъ задачъ нельзя считать окончательно установленными. Нужно ли знакомить учащихся съ такъ называемымъ, аналитическимъ пріемомъ рѣшенія задачъ и если нужно, то на какой ступени обученія, и въ какомъ отношеніи это аналитическое рѣшеніе задачъ должно находиться къ обычному синтетическому пріему?

Изъ другихъ спорныхъ вопросовъ остановлюсь еще на вопросахъ объ именованныхъ числахъ и дробяхъ. Вѣдь именованныя числа до сихъ поръ не могутъ найти своего мѣста въ курсѣ ариѳметики. Одни методисты все еще признаютъ нужнымъ выдѣлить изученіе дѣйствій надъ именованными числами въ особый отдѣлъ, тогда какъ другіе усиленно рекомендуютъ разсматривать дѣйствія надъ этими числами параллельно съ дѣйствіями надъ отвлеченными, пріурочивая раздробленіе и превращеніе составныхъ именованныхъ чиселъ къ изученію умноженія и дѣленія.

Въ области дробей я не стану разсматривать всѣмъ извѣстныхъ разногласій относительно объясненія умноженія и дѣленія на дробь и остановлюсь только на вопросѣ о послѣдовательности, въ какой учащіеся должны быть ознакомлены съ дробями: начинать-ли съ обыкновенныхъ дробей и отъ нихъ переходить къ десятичнымъ или наоборотъ? Въ русскихъ школахъ до сихъ поръ почти всегда обыкновенныя дроби проходятся раньше десятичныхъ, а послѣднія разсматриваются

какъ частный случай обыкновенныхъ дробей. Такое построеніе курса оправдывается тѣмъ, что понятія о десятой, сотой, тысячной гораздо труднѣе выяснить дѣтямъ, чѣмъ понятія о половинѣ, трети, четверти, которыя могутъ быть получены непосредственнымъ, нагляднымъ дѣленіемъ отдѣльнаго предмета на равныя части; кромѣ того, и въ практической жизни несравненно чаще приходится встрѣчаться съ дробями, выраженными въ половинахъ, четвертяхъ, восьмыхъ, чѣмъ съ такими мелкими долями, какъ сотыя и тысячныя. Въ нѣмецкой методической литературѣ существуетъ, однако, и другое направленіе: д-ръ Гартманъ, д-ръ Рейнъ и другіе настаиваютъ на изученіи десятичныхъ дробей тотчасъ послѣ ознакомленія съ дѣйствіями надъ цѣлыми числами, указывая на то, что десятичныя дроби по своему составу и по способу обозначенія гораздо ближе подходятъ къ цѣлымъ числамъ, чѣмъ къ обыкновеннымъ дробямъ, которыя по своему составу изъ долей не принадлежатъ къ числамъ десятичной системы. Поэтому на десятичныя дроби можно смотрѣть, какъ на особый видъ десятичныхъ чиселъ. Впрочемъ, и среди нѣмцевъ далеко не всѣ соглашаются съ такимъ распредѣленіемъ матеріаловъ въ курсѣ дробей. Такъ, напр., извѣстный методистъ Симонъ находитъ такой планъ обученія аналогичнымъ плану обученія письму, начинающемуся со стенографіи. Онъ приводитъ 7 доводовъ противъ прохожденія десятичныхъ дробей раньше обыкновенныхъ; изъ нихъ наиболѣе существенныя указываютъ на невозможность при такомъ порядкѣ курса выяснить надлежащимъ образомъ сущность умноженія и дѣленія на дробь и на несоотвѣтствіе такого порядка курса историческому развитію ученія о дробяхъ. Новѣйшее реформистское направленіе въ методикѣ ариѳметики, въ лицѣ проф. Гёфлера, предлагаетъ такой планъ: Въ I годъ обученія (въ средней школѣ) проходятся дѣйствія надъ цѣлыми числами и надъ десятичными дробями, разсматриваемыми какъ десятичныя числа; объясненіе производства всѣхъ дѣйствій при этомъ основывается единственно на распространеніи принципа помѣстнаго значенія цифры и на десятичныя дроби. Затѣмъ проходится подготовительный курсъ обыкновенныхъ дробей, который имѣетъ

цѣлью чисто наглядным путемъ, безъ всякой теоріи, познакомить учащихся съ простѣйшими дробями и дѣйствіями надъ ними. Когда, благодаря этому курсу, выяснится понятіе о дроби, возвращаются снова къ десятичнымъ дробямъ и разсматриваютъ ихъ уже не только какъ числа, составленныя по десятичной системѣ, но и какъ дроби. Во II годъ обученія проходится систематическій курсъ обыкновенныхъ дробей, которому предпосылается краткое ученіе о дѣлителяхъ и кратномъ. За послѣднее время и въ русскую методику начинаетъ проникать стремленіе поставить десятичныя дроби въ курсѣ ариѳметики раньше обыкновенныхъ и вмѣстѣ съ тѣмъ значительно сократить теорію дробей вообще. Такъ, г.г. Мрочекъ и Филипповичъ предлагаютъ въ первомъ циклѣ познакомить дѣтей съ простѣйшими случаями дробленія конкретныхъ единицъ и чисто наглядным путемъ научить дѣйствіямъ съ простѣйшими дробями; во второмъ циклѣ проходятся дѣйствія надъ конечными десятичными дробями, какъ надъ десятичными числами; въ III циклѣ, наконецъ, излагается не теорія обыкновенныхъ дробей, а лишь условныя опредѣленія оперированія съ символомъ $\frac{a}{b}$.—Во всякомъ случаѣ, и въ этомъ вопросѣ о курсѣ дробей много спорнаго и не выясненнаго.

Чтобы покончить съ разногласіями по вопросу объ объемѣ курса, нужно сказать еще нѣсколько словъ о тѣхъ сокращеніяхъ въ курсѣ ариѳметики и дополненіяхъ къ нему, которыя предлагаются съ разныхъ сторонъ. Что касается сокращеній, то исключеніе изъ курса статьи о нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя путемъ послѣдовательнаго дѣленія, цѣпного правила и правила учета векселей требуется довольно единодушно уже давно почти всѣми методистами и преподавателями математики. Но за послѣднее время къ этимъ требованіямъ присоединились еще новыя, которыя раздѣляются уже далеко не всѣми: сюда относится исключеніе изъ ариѳметики всѣхъ такъ наз. спеціальныхъ правилъ, всей статьи о дѣлимости, о кратномъ и дѣлителяхъ и, наконецъ, значительное сокращеніе теоріи дробей. Взамѣнъ того, различные авторы предлагаютъ дополнить курсъ ариѳметики введеніемъ статьи о прогрессіяхъ,

широкимъ примѣненіемъ графиковъ при рѣшеніи задачъ и т. д.; другіе рекомендуютъ при всякомъ удобномъ случаѣ пользоваться ариѳметикой для рѣшенія геометрическихъ вопросовъ и такимъ образомъ дополнить курсъ ариѳметики пропедевтическимъ курсомъ геометріи; третьи считаютъ возможнымъ уже въ ариѳметикѣ обобщать понятіе о числѣ и знакомить дѣтей съ отрицательными числами...

Методы и пріемы обученія тоже нельзя считать установившимися и опредѣлившимися. Правда, такой общій принципъ, какъ принципъ наглядности обученія, не возбуждаетъ въ настоящее время самъ по себѣ уже никакого сомнѣнія; но относительно примѣненія этого принципа на дѣлѣ и въ теоріи методики, и на практикѣ приходится наблюдать еще много разногласій; рядомъ съ требованіями самаго широкаго примѣненія наглядности приходится слышать упреки въ томъ, что наглядное обученіе заходитъ слишкомъ далеко и пріучая дѣтей познавать все внѣшними чувствами, не даетъ имъ матеріала для упражненія въ отвлеченномъ мышленіи. А за послѣднее время все чаще и чаще слышатся голоса, неудовлетворяющіеся одной наглядностью при обученіи и рекомендующіе замѣну нагляднаго метода — лабораторнымъ. Сущность лабораторнаго метода, такъ широко распространеннаго въ школахъ Америки и понемногу проникающаго и къ намъ, состоитъ, какъ извѣстно, въ томъ, что учащіеся должны не только наблюдать по указанію учителя тѣ или другія наглядныя пособія, но должны сами экспериментировать съ ними, еще лучше сами создавать эти пособія.

Учащимся раздаются на руки простѣйшія наглядныя пособія и матеріалъ для изготовленія другихъ пособій, необходимыхъ для уроковъ ариѳметики, и классъ превращается такимъ образомъ въ лабораторію. Съ педагогической точки зрѣнія, лабораторная метода имѣетъ значительныя преимущества передъ наглядной, такъ какъ при лабораторныхъ занятіяхъ учащіеся принимаютъ активное участіе въ работѣ, а не только слушаютъ и воспринимаютъ объясненія учителя; самостоятельная работа возбуждаетъ въ нихъ интересъ къ занятіямъ ариѳметикой и даетъ имъ возможность проявить твор-

ческія силы. Лабораторная метода можетъ быть обоснована и признана удачной и на основаніи новѣйшихъ ученій психологіи, согласно которымъ наше мышленіе тѣсно соприкасается съ областью ощущеній и впечатлѣній. Чѣмъ больше органовъ чувствъ участвуютъ въ воспріятіи ощущеній при соприкосновеніи съ внѣшнимъ міромъ, тѣмъ отчетливѣе, яснѣе и ярче возникающія въ нашемъ сознаніи представленія, тѣмъ легче переходъ отъ представленій къ общимъ понятіямъ, тѣмъ правильнѣе происходитъ процессъ мышленія.—Съ другой стороны, нѣкоторые педагоги-практики приводятъ довольно существенныя возраженія противъ широкаго примѣненія лабораторныхъ занятій: эти занятія требуютъ прежде всего большой затраты матеріальныхъ средствъ, совершенно непосильной для большинства нашихъ школъ; они требуютъ много мѣста въ классѣ и, пожалуй, устройства особой классной мебели; на эти занятія затрачивается слишкомъ много времени и, наконецъ, если ихъ не разнообразить постоянно, они могутъ также скоро наскучить ученикамъ, какъ всякія другія повторяемыя изо дня въ день упражненія.

Говоря о методахъ и пріемахъ обученія, нельзя обойти молчаніемъ и различнаго отношенія преподавателей и методистовъ къ *примѣненію индукціи и дедукціи при обученіи ариѳметикѣ*. Разумѣется, пріемы старой школы, въ которой все велось дедуктивно отъ усвоенія наизусть общихъ опредѣленій и правилъ къ примѣненію этихъ общихъ истинъ къ отдѣльнымъ частнымъ случаямъ—осуждены въ настоящее время единогласно. Зато теперь проявляется другая крайность: приходится встрѣчаться съ мнѣніемъ, будто при обученіи ариѳметикѣ *должны* примѣняться только такіе пріемы и упражненія, которые допускаютъ индуктивный ходъ мыслей учащихся. Это мнѣніе я позволяю себѣ назвать крайностью, потому что очевидно, что насколько индукція пригодна для выработки общихъ понятій, открытія новыхъ законовъ и формулировки общихъ правилъ, *настолько-же дедукція необходима для* примѣненія этихъ общихъ истинъ къ частнымъ случаямъ. Но открытіе и усвоеніе общихъ истинъ (теорія ариѳметики) и примѣненіе этихъ истинъ (практика) при обученіи ариѳметикѣ тѣсно соприкасаются и пере-

плетаются между собой; поэтому можетъ случиться, что частный фактъ, подводимый подъ извѣстную общую категорію, самъ вмѣстѣ съ тѣмъ получаетъ значеніе общей истины, становится общимъ правиломъ. Такъ, напр., примѣняя общее перемѣстительное свойство умноженія къ частнымъ случаямъ умноженія на 10, 100, 1000 и т. д., учащіеся могутъ найти общее правило умноженія на разрядную единицу. Значитъ, дедукція пригодна иногда даже для установленія общихъ истинъ, и изгонять изъ преподаванія всякое примѣненіе дедукціи—неразумно.

Все вышеизложенное имѣло цѣлью показать, что наша современная методика ариѳметики, не только русская, но и западно-европейская, ни коимъ образомъ не можетъ считаться вполнѣ опредѣлившейся дисциплиной, и я думаю, что приведенные примѣры вполнѣ убѣдительно показываютъ, какъ много спорнаго и противорѣчиваго въ наукѣ объ обученіи ариѳметикѣ. Я не буду останавливаться на детальномъ разборѣ этихъ разногласій, не буду пытаться установить правильную точку зрѣнія на каждый изъ затронутыхъ вопросовъ; это не входитъ въ мою задачу. Мнѣ важно было установить самый фактъ существованія спорныхъ пунктовъ въ методикѣ ариѳметики и, по возможности, выяснить причины, вызывающія эти разногласія и противорѣчивые взгляды. Такихъ причинъ, можетъ быть, много, но, во всякомъ случаѣ, среди нихъ врядъ-ли играетъ какую-нибудь роль та причина, которую нѣкогда указывалъ Беетцъ, т. е. отсутствіе общей идеи, объединяющей всѣ методическія положенія и требованія, отсутствіе одного принципа, изъ котораго вся методика ариѳметики вытекала-бы, какъ необходимое и единственное слѣдствіе. Наоборотъ, мнѣ думается, что многія разногласія и противорѣчивыя мнѣнія являются результатомъ излишней теоретичности въ построеніи методики ариѳметики и объясняются именно стремленіемъ вывести дедуктивно всѣ методическія положенія изъ одного какого-нибудь принципа, установленнаго недостаточно научно и на опытѣ мало провѣреннаго. Песталоцци и его послѣдователи, на основаніи чисто теоретическихъ соображеній, выдвинули на первый планъ формальную цѣль обуче-

нія ариѳметики и, въ зависимости отъ этого, опредѣлили объемъ и характеръ курса и методъ преподаванія. Въ настоящее время формальная цѣль подчиняется матеріальной, и въ зависимости отъ этого руководящаго принципа перестраивается курсъ ариѳметики; можетъ быть, этотъ принципъ и вѣренъ, но онъ добытъ не путемъ опыта и наблюденія надъ учащимися, а установленъ опять-таки чисто теоретически. Въ свое время появился Грубе и возвѣстилъ монографическое изученіе чиселъ, и вся методика ариѳметики приняла извѣстное направленіе, и у насъ въ Россіи появились сочиненія Евтушевскаго, Паульсона, Воленса и другихъ, видѣвшихъ единственное спасеніе въ «изученіи чиселъ». Но вотъ появляются въ Германіи работы Книллинга и Танка, а у насъ Гольденберга и Шохоръ-Троцкаго, очень остроумно и рѣзко, но чисто-теоретически критикующія ученіе Грубе, и принципъ изученія чиселъ отброшенъ, какъ ненужная ветошь, а на мѣстѣ его устанавливается принципъ изученія дѣйствій и вся методика ариѳметики перестраивается сообразно этому. Въ недавнее время д-ръ Лай публикуетъ свое руководство къ первоначальному обученію ариѳметикѣ, въ основѣ котораго положенъ опять-таки принципъ непосредственнаго воспріятія числа путемъ наблюденія конкретныхъ группъ, и методика ариѳметики снова поворачиваетъ въ сторону заброшеннаго и забытаго изученія чиселъ. Въ томъ-то и бѣда, что наши методисты, требуя примѣненія индуктивнаго метода при обученіи дѣтей, при построеніи самой методики ариѳметики пользуются, по большей части, чистой дедукціей, исходя при этомъ изъ положенія, не провѣреннаго на опытѣ (методика Галанина).

Я предвижу возраженія. Мнѣ могутъ сказать, что именно за послѣднее время методика ариѳметики становится какъ будто на другой путь, путь экспериментальнаго изслѣдованія. Работы д-ра Лая, Шнейдера, Вальземана и др. стараются чисто опытнымъ путемъ установить факты, подтверждающіе ихъ теоріи. Въ этомъ возраженіи, несомнѣнно, имѣется доля истины. Но, во-первыхъ, нужно-же признать, что этихъ экспериментальныхъ работъ пока еще очень немного, а, во-вторыхъ, онѣ производятся въ особыхъ условіяхъ, далеко не всегда со-

отвѣтствующихъ условіямъ дѣйствительной работы учителя въ классѣ. Во всякомъ случаѣ, такія научно поставленныя опытныя изслѣдованія весьма важны и полезны, и можно только пожелать имъ болѣе широкаго распространенія. По ихъ однихъ, по моему мнѣнію, все-таки недостаточно для правильнаго развитія методики ариѳметики. Мы до сихъ поръ изучали методику ариѳметики почти догматически, принимая на вѣру то, что вычитывали въ томъ или другомъ руководствѣ. Пора намъ и въ этой области перейти не только къ наглядной, но и лабораторной работѣ; пора намъ самимъ, учителямъ, принять активное участіе въ выработкѣ методики. Пусть каждый учитель, отвергнувъ разъ навсегда всякую рутину, производитъ изслѣдованія въ своемъ классѣ, испытывая различные пріемы обученія и наглядныя пособія, дѣлаетъ опыты надъ введеніемъ въ курсъ новыхъ отдѣловъ, старательно отмѣчаетъ интересъ дѣтей къ отдѣльнымъ частямъ курса къ тѣмъ или инымъ задачамъ и т. д. Разумѣется, въ такой работѣ отдѣльнаго учителя могутъ встрѣчаться ошибки и неправильные выводы, зависящіе отъ многихъ причинъ. Ихъ нужно исправить сравненіемъ съ результатами работъ другихъ учителей. Нужна коллективная обработка методики ариѳметики всѣми учителями начальной и средней школы. Поэтому нужно пожелать, чтобы создались надлежащія условія для такой коллективной работы, чтобы съѣзды преподавателей математики, педагогическія выставки, кружки и общества учителей математики получили возможно широкое распространеніе и стали бы не исключительными, а обычными явленіями нашей педагогической жизни».

VIII. О лабораторныхъ занятіяхъ по математикѣ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Кавказскаго учебнаго округа.

Докладъ Н. П. Попова (Тифлисъ).

11 сентября 1907 года г. Попечителемъ Кавказскаго учебнаго округа былъ изданъ циркуляръ о практическихъ лабораторныхъ занятіяхъ по всѣмъ предметамъ средней школы.

«Однимъ изъ серьезныхъ недостатковъ нашей средней школы, говорится въ циркулярѣ, несомнѣнно является нѣкоторая отвлеченность преподаванія, оторванность усваиваемаго питомцами школы учебнаго матеріала отъ жизни, вслѣдствіе чего оканчивающіе курсъ школы, въ лучшемъ случаѣ, выносятъ изъ нея одни отвлеченныя, пріобрѣтенныя чисто теоретическимъ путемъ, познанія и очень мало основательныхъ практическихъ умѣній, необходимыхъ для жизни и служащихъ средствомъ для прочнаго закрѣпленія въ сознаніи молодыхъ людей преподаннаго имъ въ школѣ теоретическаго матеріала». Однимъ изъ средствъ къ устраненію указаннаго недостатка рекомендуется введеніе практическихъ, «такъ сказать, лабораторныхъ занятій по всѣмъ предметамъ средней школы». Эти практическія занятія, служа цѣлямъ закрѣпленія преподаваемаго въ классѣ, заинтересуютъ и привлекутъ учащихся, если будетъ проведенъ принципъ самостоятельности при исполненіи всякой работы.

Принципіальный вопросъ объ организаціи практическихъ «лабораторныхъ» занятій по всѣмъ предметамъ курса среднихъ учебныхъ заведеній былъ подвергнутъ обстоятельному и всестороннему обсужденію въ Педагогическихъ Совѣтахъ и, согласно заключеніямъ и постановленіямъ таковыхъ, эти занятія по тѣмъ или другимъ предметамъ, въ зависимости отъ мѣстныхъ условій, начали постепенно входить въ жизнь учебныхъ заведеній, какъ одинъ изъ могучихъ факторовъ въ общей системѣ обученія и воспитанія.

Въ настоящее время въ Кавказскомъ учебномъ округѣ къ лабораторнымъ занятіямъ относятся такія работы учащихся, которыя удовлетворяютъ слѣдующимъ существеннымъ признакамъ ихъ выполненія: 1) Лабораторныя занятія происходятъ во внѣурочное время. 2) Они необязательны, и учащійся имѣетъ право выбирать для лабораторныхъ занятій ту или другую группу наукъ, тотъ или другой кругъ вопросовъ изъ данной науки. 3) Всю работу производитъ ученикъ самостоятельно: онъ самъ разсматриваетъ, разбираетъ и собираетъ приборъ, самъ ставитъ опытъ, производитъ наблюденія, дѣлаетъ вычисленія и самостоятельно выводитъ окончательное заключеніе.—

«Пусть Эмиль не заучиваетъ готовой науки, а самостоятельно продумываетъ ее» (Руссо). Учитель здѣсь является только опытнымъ руководителемъ въ выборѣ темъ для работы, умѣлымъ совѣтчикомъ въ затруднительныхъ случаяхъ, направляющимъ мысли неопытнаго молодого изслѣдователя на тѣ стороны предмета, которыя остались внѣ его вниманія. 4) Лабораторныя занятія должны быть поставлены въ тѣсную органическую связь съ матеріаломъ, изучаемымъ въ классѣ въ области той или другой науки.

Понятно, для прочной организаціи лабораторныхъ занятій вопросъ объ изысканіи средствъ какъ на пріобрѣтеніе необходимыхъ пособій, такъ и на вознагражденіе руководителей, имѣетъ существенное значеніе и долженъ быть выясненъ и разрѣшенъ одновременно съ утвержденіемъ плана предполагаемыхъ работъ.

Не смотря на то, что всѣ Педагогическіе Совѣты признали важное значеніе лабораторныхъ занятій въ общей системѣ образованія и воспитанія, однако не вездѣ эти занятія введены.

Причины такого явнаго расхожденія слова съ дѣломъ крайне разнообразны: отсутствіе необходимыхъ помѣщеній, приборовъ, приспособленій, подготовленныхъ опытныхъ руководителей, отсутствіе средствъ на вознагражденіе руководителей, или обычное у насъ откладываніе необязательныхъ занятій со дня на день.

По тѣмъ или инымъ причинамъ, организація лабораторныхъ занятій по чистой и прикладной математикѣ не вошла еще въ жизнь всѣхъ среднихъ учебныхъ заведеній. Въ тѣхъ же среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Кавказскаго Учебнаго Округа, въ которыхъ вышеприведенная мысль Попечителя Округа о лабораторныхъ занятіяхъ получила осуществленіе, занятія эти находятся въ періодѣ постепеннаго развитія и не представляютъ пока стройной законченной системы, охватывающей всевозможные виды практическихъ занятій, требующихъ извѣстныхъ познаній изъ математики.

На основаніи свѣдѣній, доставленныхъ начальниками учебныхъ заведеній къ 18 декабря 1911 года, всѣ лаборатор-

ныя занятія по математикѣ, организованныя въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Кавказскаго Учебнаго Округа, можно раздѣлить на слѣдующіе виды: 1. Практическія занятія, относящіяся къ ариѳметикѣ, геометріи и тригонометріи. 2. Обработка метеорологическихъ наблюденій. 3. Практическія занятія по физикѣ измѣрительнаго характера, требующія вычисленій или составленія графиковъ.

I. Въ нѣкоторыхъ учебныхъ заведеніяхъ, лабораторныя занятія начинаютъ примѣняться съ младшихъ классовъ при прохожденіи ариѳметики: послѣ знакомства съ квадратными и кубическими мѣрами, ученики опредѣляютъ: объемъ класса; число кубическихъ саженъ дровъ, сложенныхъ на дворѣ; число кирпичей, использованныхъ для устройства столба или стѣны; измѣряютъ площадь оконъ, пола, двора или какого-либо другого земельнаго участка. Для составленія правильныхъ представленій о крупныхъ единицахъ длины и поверхности, ученики въ открытомъ полѣ опредѣляютъ глазомѣромъ разстоянія между телеграфными столбами и другими предметами, а затѣмъ провѣряютъ себя непосредственнымъ измѣреніемъ рулеткой. Подобнымъ образомъ дѣти знакомятся съ верстой, со средней скоростью пѣшехода, съ измѣреніемъ земельныхъ участковъ и съ нанесеніемъ ихъ на планъ въ томъ или иномъ масштабѣ.

Въ старшихъ классахъ, ученикамъ предлагаются уже болѣе сложныя практическія работы и притомъ на открытой мѣстности. При прохожденіи и повтореніи отдѣла геометріи о площадяхъ, они производятъ съемку плановъ земельныхъ участковъ при помощи астролябіи и мензулы. Кромѣ того, учениками непосредственно изготовляются модели геометрическихъ тѣлъ изъ дерева, стекла, слюды и проволоки, служащія наглядными пособіями при прохожденіи курса геометріи. Свои познанія по тригонометріи ученики примѣняютъ къ опредѣленію, съ помощью теодолита и мѣрной цѣпи или рулетки, разстояній какъ между двумя недоступными точками, такъ и высотъ различныхъ возвышенныхъ предметовъ, напр.: церквей, маяковъ, деревьевъ.

II. Метеорологическія наблюденія на станціяхъ, устроен

ныхъ при нѣкоторыхъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ и городскихъ училищахъ, представляютъ тотъ типъ лабораторныхъ занятій, который уже давно существовалъ въ Кавказскомъ Округѣ и въ настоящее время все болѣе развиваются. Особенно важное практическое и научное значеніе имѣетъ организація непрерывныхъ метеорологическихъ наблюденій. Получаемыя при этомъ данныя, при обработкѣ ихъ, представляютъ хорошій матеріалъ для упражненія учениковъ въ вычисленіяхъ и нахожденіи среднихъ величинъ; при вычерчиваніи графиковъ по этимъ даннымъ ученики знакомятся съ различными видами функціональной зависимости. Для достиженія при занятіяхъ на метеорологическихъ станціяхъ преслѣдуемыхъ научныхъ и педагогическихъ цѣлей необходимо, чтобы производимыя наблюденія, во 1-хъ, были надежны и, во 2-хъ, были непрерывны.

Въ виду же того, что правильное, тщательное и регулярное веденіе наблюденій требуетъ особенныхъ наклонностей, которыми большинство учениковъ не обладаетъ, все дѣло приходится сосредоточивать, подъ общимъ наблюденіемъ преподавателя, въ рукахъ немногихъ любителей, на которыхъ и возлагается обязанность производить ежедневныя наблюденія въ 7 час. утра, въ 1 ч. дня и въ 9 час. вечера. Обработка же этихъ наблюденій нерѣдко поручается другимъ ученикамъ. Благодаря такому веденію дѣла, почти всѣ ученики имѣютъ возможность знакомиться въ любое время съ правильными научными метеорологическими наблюденіями, изучать производство ихъ, заниматься обработкой результатовъ этихъ наблюденій и получать точныя данныя для составленія графиковъ.

Кромѣ того, въ нѣкоторыхъ учебныхъ заведеніяхъ, при которыхъ нѣтъ метеорологическихъ станцій, ведутся — главнымъ образомъ съ цѣлью практическаго ознакомленія учениковъ съ составленіемъ графиковъ — простѣйшія метеорологическія наблюденія надъ температурой и давленіемъ атмосферы.

III. Наиболѣе широкую и систематическую постановку получили въ Кавказскомъ Учебномъ Округѣ лабораторныя занятія по физикѣ. Занятія эти подраздѣляются на четыре отдѣла: 1) измѣрительнаго характера, 2) качественнаго харак-

тера, 3) работы по изготовленію приборовъ по физикѣ, 4) чтеніе рефератовъ.

Спеціальныя задачи настоящаго Съѣзда побуждаютъ остановиться лишь на первой категоріи занятій учениковъ, т. е. на работахъ измѣрительнаго характера. Работы эти ведутся преподавателями съ группами учениковъ по 2—3 человѣка въ каждой— опытъ показалъ преимущество этой системы передъ фронтовой. Каждой группѣ предлагается отдѣльная работа изъ пройденнаго курса физики, выдаются необходимые для выполненія заданія приборы и матеріалъ, и ученики, подъ руководствомъ преподавателя, пользуясь возможно большею самостоятельностью, производятъ опыты и наблюденія, дѣлаютъ отсчеты и измѣренія; полученные результаты тутъ же обрабатываются и записываются въ книгу. Болѣе сложныя вычисленія и составленіе графиковъ иногда производятся дома.

Въ настоящее время лабораторныя занятія по физикѣ практикуются почти во всѣхъ учебныхъ заведеніяхъ Округа. Многими преподавателями, имѣющими за собой большую практику, выработаны даже системы послѣдовательныхъ работъ, способы ихъ выполненія, пріемы записи данныхъ опыта и послѣдующихъ вычисленій и составленіе отчета о произведенной работѣ.

IV. Полученными отъ преподавателей свѣдѣніями устанавливается тотъ отрадный фактъ, что занятія эти повсемѣстно встрѣчаютъ живой откликъ и вызываютъ большой интересъ среди учащихся. Уже одно то обстоятельство, что занятія эти, не смотря на свою необязательность, привлекаютъ значительное число учениковъ,— служитъ яркимъ свидѣтельствомъ жизненности описанной выше мѣры— введенія лабораторныхъ занятій. Дальнѣйшее ея преуспѣяніе, очевидно, находится въ рукахъ преподавателей, и отъ нихъ зависитъ успѣхъ этого большого дѣла.

Остается еще добавить, что Попечитель Кавказскаго Учебнаго Округа, особенно сочувственно относясь къ вопросу о лабораторныхъ занятіяхъ, организовалъ— спеціально въ видахъ содѣйствія расширенію области указанныхъ занятій по физикѣ и математикѣ,—періодическое изданіе Физико-Матема-

тическаго Сборника, къ участію въ коемъ привлекаются ученики. Участіе это должно выразиться въ присылкѣ учениками рѣшеній задачъ, предложенныхъ въ сборникѣ, рефератовъ, имѣющихъ въ основѣ оригинальную мысль, переводовъ статей, оригинальныхъ задачъ изъ курса среднихъ учебныхъ заведеній и вообще всего, что является дѣйствительнымъ результатомъ лабораторныхъ занятій учащихся по чистой и прикладной математикѣ и представляетъ общій интересъ.

Съ результатами лабораторныхъ занятій учениковъ Кавказскаго Учебнаго Округа желающіе могутъ нагляднѣе ознакомиться по работамъ учениковъ, помѣщеннымъ на открытой при Съѣздѣ выставкѣ; тамъ же имѣются для ознакомленія экземпляры упомянутаго выше Физико-Математическаго Сборника».

Пренія по докладу Н. П. Попова.

В. И. Баранчикъ (Маріуполь, Екат. губ.) высказался въ томъ смыслѣ, что вопросы, затронутые въ докладѣ г. Попова, были бы болѣе умѣстны въ спеціальной секціи окончившагося II Менделеевскаго съѣзда. Что же касается метеорологическихъ наблюденій, то на нихъ, по мнѣнію оппонента, нельзя смотрѣть, какъ на практическія занятія по математикѣ.

Б. К. Крамаренко (Тифлисъ) замѣтилъ, что вычислительныя работы по физикѣ, метеорологіи и космографіи, сопровождаемыя вычерчиваніемъ графиковъ, представляютъ собою въ той же мѣрѣ практическую работу по математикѣ, какъ приготовленіе учащимися геометрическихъ моделей представляетъ собою практическую работу по геометріи.

М. Е. Волокобинскій (Рига) указалъ, что у него имѣются свѣдѣнія о томъ, что указанная докладчикомъ постановка лабораторнаго метода въ Кавказскомъ округѣ только начинаетъ развиваться и еще не является столь солидно поставленнымъ дѣломъ, какъ это можно было бы заключить изъ доклада г. Попова. По мнѣнію оппонента, этотъ докладъ слѣдовало бы подкрѣпить цифровыми данными.

Н. П. Поповъ. „Вполнѣ соглашаясь съ мнѣніемъ г. Волокобинскаго, оттѣнившаго необходимость подкрѣпленія доклада соотвѣтствующими цифровыми данными, считаю себя обязаннымъ

пояснить, что польза приведенія этихъ данныхъ сознавалась мною при составленіи доклада. Однако, осуществленію этого предположенія помѣшала краткость того времени, которое имѣлось въ моемъ распоряженіи для надлежащей разработки относящагося сюда статистическаго матеріала. Притомъ же, сообщеніе въ многолюдномъ собраніи многочисленныхъ цифровыхъ данныхъ едва ли могло бы имѣть реальное значеніе для собранія. Тѣмъ не менѣе, отмѣченный выше пробѣлъ будетъ восполненъ въ упомянутомъ мною Физико-Математическомъ Сборникѣ".

Б. К. Крамаренко (Тифлисъ). „Въ томъ, что подобныя занятія дѣйствительно имѣютъ мѣсто въ уч. заведеніяхъ Кавказскаго Учебнаго Округа, желающіе могутъ убѣдиться, посмотрѣвъ работы учащихся на выставкѣ, на которую присланы работы изъ Тифлисскихъ 1-ой, 2-ой, 3-ей и 4-ой гимназій, Владикавказской 1-ой, Сочинской прогимназіи, Елисаветпольской гимназіи, Ейскаго, Кубанскаго, Бакинскаго, Тифлисскаго, Темрюкскаго реальныхъ училищъ. Везти сюда всѣ работы, конечно, было бы излишне".

IX. Отдѣлъ логариѳмовъ въ средней школѣ.

(Желательныя измѣненія въ преподаваніи теоріи и практики логариѳмовъ).

Докладъ В. А. Марковича (Спб.).

«Учебный планъ теоріи и практики логариѳмовъ въ современной русской школѣ страдаетъ въ двухъ отношеніяхъ: онъ недостаточно строгъ съ научной точки зрѣнія и, вмѣстѣ съ тѣмъ, представляетъ значительныя трудности для начинающихъ.

Научное изложеніе теоріи логариѳмовъ требуетъ предварительнаго установленія понятія объ ирраціональныхъ числахъ и нѣкоторыхъ свойствъ показательной функціи. Но послѣднее выходитъ изъ предѣловъ программы, а первое, т. е. теорія ирраціональныхъ чиселъ, хотя и значится въ ней, но проходится болѣе, чѣмъ примитивно.

Между тѣмъ, русскіе учебники алгебры начинаютъ отдѣлъ съ общихъ теоремъ. Въ курсѣ элементарной алгебры такія теоремы совершенно невразумительны для учениковъ, потому

что ходъ доказательствъ для нихъ непривыченъ и очень труденъ. Въ результатѣ,—если только преподаватель слѣдуетъ такому учебному плану, что, къ счастью, не составляетъ общаго правила, — ученики съ большими лишь усиліями преодолѣваютъ обоснованіе теоріи логариѳмовъ, научно не состоятельное, методически не производительное и практически — совершенно безполезное.

Изученіе логариѳмической практики также поставлено мало производительно и неправильно. Главный недостатокъ здѣсь тотъ, что логариѳмическія вычисленія не связаны съ системою приближенныхъ вычисленій вообще. Наши задачники предлагаютъ вычисленія необыкновенно вычурныхъ формулъ, степеней и корней съ совершенно фантастическими показателями, но числа въ нихъ подобраны для пятизначныхъ лишь логариѳмовъ, и отвѣты требуются такіе, чтобы не могло даже возникнуть вопроса о степени точности окончательныхъ результатовъ.

Эти немногія общія указанія считаю достаточными для утвержденія, что учебный планъ отдѣла логариѳмовъ требуетъ той же коренной методической реформы, какъ и почти всѣ другіе отдѣлы курса математики средней школы. Необходимо подраздѣлить изученіе логариѳмовъ на двѣ ступени. На первой нужно дать правила логариѳмированія и достаточную практику вычисленій съ четырехзначными или пятизначными таблицами; во вторую,—при существующемъ объемѣ курса, — могла бы войти остальная часть требуемаго нынѣ матеріала съ самыми незначительными дополненіями.

Въ русской литературѣ, насколько мнѣ извѣстно, не поднимался еще вопросъ о необходимости подраздѣленія изученія логариѳмовъ на ступени. Поэтому, въ подкрѣпленіе своихъ тезисовъ, я вынужденъ обратиться къ иностранной практикѣ и литературѣ.

Во французской средней школѣ давнымъ-давно, еще до реформы 1902—1905 г.г., установлено было такое подраздѣленіе: въ общихъ классахъ давалось опредѣленіе логариѳмовъ, какъ послѣдовательныхъ членовъ ариѳметической прогрессіи, соотвѣтствующихъ послѣдовательнымъ членамъ нѣкоторой гео-

метрической. Изъ этого опредѣленія непосредственно выводились правила логариѳмированія и свойства десятичныхъ логариѳмовъ. И только въ дополнительномъ курсѣ (classes mathématiques spéciales) устанавливалось опредѣленіе логариѳма, какъ показателя степени. До вторичнаго изученія логариѳмовъ проходились: сперва теорія ирраціональныхъ чиселъ, дробные и несоизмѣримые показатели; биномъ Ньютона со многими его приложеніями и, въ частности, съ выводомъ числа e, теорія рядовъ и, наконецъ, спеціальная глава о показательной функціи. Понятно, что послѣ такой подготовки ученики получали и усваивали не квази-доказательства, а настоящія доказательства, не обрывки теоріи, а стройную теорію логариѳмической функціи.

Въ 1902 году программы и, въ особенности, методы преподаванія французской средней школы подверглись коренной ломкѣ. Въ 1905 году программа пошла еще дальше въ сторону реформы обученія. Но, несмотря на многія существенныя измѣненія въ другихъ областяхъ алгебры, реформа сохранила, въ общемъ, прежній учебный планъ для логариѳмовъ, формально установивъ раздѣленіе этого отдѣла на два цикла.

Въ Англіи издавна установлено подраздѣленіе отдѣла логариѳмовъ. Теорія логариѳмовъ проходилась въ курсѣ алгебры, практика—въ курсѣ тригонометріи. Это уже вноситъ нѣкоторое облегченіе. Кромѣ того, ученики избавлены отъ непроизводительныхъ упражненій въ логариѳмированіи нелѣпо-сложныхъ формулъ; вычисленія даются болѣе или менѣе практическаго характера—для сложныхъ процентовъ, срочныхъ уплатъ, уравненій сроковъ, для вопросовъ элементарной теоріи вѣроятностей и страховыхъ. Но главная особенность англійскаго плана—краткость теоретическихъ свѣдѣній о логариѳмахъ. Несмотря на то, что изложенію теоріи логариѳмовъ предшествуютъ, кромѣ прогрессій, такіе отдѣлы, какъ биномъ Ньютона съ его приложеніями, неопредѣленные коэффиціенты, «экспоненціальная теорема» (разложеніе a^x и e^x въ ряды по степенямъ x) и, наконецъ, теорія рядовъ, — отдѣлъ (алгебраическій) о логариѳмахъ занимаетъ нѣсколько лишь страницъ,—гораздо меньше, чѣмъ въ русскихъ учебникахъ, и притомъ нѣтъ ни одной изъ

«общихъ теоремъ», о которыхъ была рѣчь. Интересно отмѣтить, что такихъ теоремъ нѣтъ и въ «Учебникѣ Алгебры» г. Б. Чихапова, допущенномъ Мин. Нар. Просв. въ качествѣ руководства для гимназій. Между прочимъ, въ этомъ руководствѣ даже распространеніе свойствъ раціональныхъ показателей на ирраціональные производится однимъ лишь «словеснымъ условіемъ».

Цѣль моего сообщенія—обратить вниманіе Съѣзда на нѣкоторые новые пріемы, значительно облегчающіе первоначальное знакомство съ теоріею и практикою логариѳмовъ, и на такую программу, которая дала бы законченное содержаніе для перваго цикла и, вмѣстѣ съ тѣмъ, практическую подготовку для послѣдующаго изученія теорій показательныхъ и логариѳмическихъ функцій.

Изложу въ сокращенномъ видѣ планъ перваго концентра того курса логариѳмовъ, который мнѣ пришлось провести два года тому назадъ въ духѣ французской программы.

Изъ основного допущенія

$$\log a + \log b = \log (ab) \qquad (I)$$

непосредственно выводится:

$$1)\ \log 1 = o,$$

положивъ въ (I) число $b = 1$;

$$2)\ \log \frac{1}{a} = -\log a,$$

положивъ въ (I) $b = \frac{1}{a}$;

$$3)\ \log (a:b) = \log a - \log b,$$

взявъ, вмѣсто b, дробь $\frac{1}{b}$;

$$4)\ \log (a^n) = n \log a,$$

принявъ въ соображеніе, что

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a.$$

Столь же легко получить, что

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a,$$

и распространить значеніе $\log (a^n)$ на случай отрицательныхъ и дробныхъ показателей.

Всѣ эти правила я подтверждаю числовыми примѣрами, взятыми изъ таблицы трехзначныхъ логариомовъ. Логариомы приведены въ ней съ характеристиками (0 и 1), что позволяетъ оперировать съ логариомами, и ученики въ одинъ—два урока твердо усваиваютъ обращеніе съ нею.

Послѣ этого я показываю, что если помножить логариомы той же таблицы на какое угодно конечное число, то получится новая таблица логариомовъ, т. е. устанавливаю понятіе о множественности логариомическихъ системъ, а затѣмъ—понятіе объ основаніи системы (т. е. о числѣ, логариомъ котораго принятъ за единицу) и, наконецъ, устанавливаю, что логариомы извѣстной уже ученикамъ таблицы называются десятичными, такъ какъ въ ней log 10 = 1.

Затѣмъ столь же просто выводятся свойства десятичныхъ логариомовъ въ не менѣе полномъ объемѣ, чѣмъ въ систематическихъ курсахъ, но съ болѣе точнымъ опредѣленіемъ характеристики, которая вообще не можетъ быть отожествлена съ «цѣлою частью логариома», напр., для отрицательныхъ логариомовъ; наконецъ, можно перейти къ таблицамъ четырехзначныхъ или пятизначныхъ логариомовъ.

Въ первый годъ своего преподаванія по этой системѣ (въ шестомъ классѣ женской гимназіи) я переходилъ къ четырехзначнымъ логариомамъ, въ слѣдующемъ году я былъ стѣсненъ учебнымъ временемъ и потому непосредственно перешелъ къ пятизначнымъ таблицамъ. Могу засвидѣтельствовать, что результаты получилъ не худшіе, чѣмъ при предварительномъ знакомствѣ съ четырехзначными. Дѣло въ томъ, что главную подготовку къ «настоящимъ таблицамъ» даетъ первая «учебная» таблица трехзначныхъ логариомовъ. Переходъ къ таблицамъ пятизначнымъ составлялъ лишь небольшое ариометическое осложненіе.

При такомъ учебномъ планѣ отдѣлъ логариомовъ является для учащихся однимъ изъ самыхъ легкихъ, интересныхъ и имѣющихъ много примѣненій.

Переходъ къ второму циклу чрезвычайно легокъ; исходя изъ тѣхъ же допущеній, можно непосредственно доказать, что всякій логариомъ является показателемъ нѣкоторой степени

основанія системы, т. е. того числа a, для котораго $\log a = 1$.

Этотъ учебный планъ, котораго я придерживаюсь *) уже третій годъ, нѣсколько отличается отъ французскаго 1-го цикла, но основы ихъ одинаковы. Вѣроятно, во Франціи новый учебный планъ получилъ еще болѣе подробную и удачную разработку, но и тѣхъ фактовъ и соображеній, которые я здѣсь привелъ, совершенно, по моему мнѣнію, достаточно, чтобы поставить на очередь вопросъ о реформѣ преподаванія отдѣла о логариомахъ въ русской средней школѣ».

Тезисы.

I) Обоснованіе теоріи логариомовъ въ курсахъ русской средней школы оставляетъ многаго желать въ отношеніи научной строгости.

II) Вмѣстѣ съ тѣмъ, несмотря на послабленія въ области доказательствъ, изученіе логариомовъ представляетъ значительныя трудности для учениковъ, — особенно въ началѣ, вслѣдствіе чего и преподавателямъ приходится затрачивать несоразмѣрное (съ существомъ дѣла) количество труда и класснаго времени. Оба эти факта легко объясняются недостаточною разработанностью методики преподаванія теоріи и практики логариомовъ.

Предложенія.

1) Слѣдуетъ раздѣлить преподаваніе «Отдѣла логариомовъ» на два цикла.

2) Въ первомъ циклѣ необходимо постулировать нѣкоторыя свойства логариомовъ, что дастъ возможность легко и, вмѣстѣ съ тѣмъ, совершенно строго вывести остальныя ихъ общія свойства и, въ частности, отличительныя свойства десятичныхъ (обыкновенныхъ) логариомовъ.

*) Интересующимся подробностями этого плана я могу указать лишь на мою книгу „Начальные логариомы“, Спб., 1912, книга преподавателя. Цѣна 60 коп.

3) Основной постулатъ для перваго цикла и, вмѣстѣ съ тѣмъ, первоначальное опредѣленіе логариѳма:

Всякимъ двумъ положительнымъ числамъ (a и b) и ихъ произведенію (ab) соотвѣтствуютъ другія числа ($\log a$, $\log b$ и $\log ab$), удовлетворяющія равенству:

$$\log a + \log b = \log (ab)$$

Это видоизмѣненіе извѣстнаго въ Анализѣ опредѣленія логариѳмической функціи, для которой, при двухъ значеніяхъ x_1 и x_2 независимой перемѣнной существуетъ тожество:

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(x_1 x_2)$$

Изъ этого опредѣленія непосредственно и чрезвычайно просто выводятся другія общія свойства (не зависящія отъ величины, знака и характера ихъ основаній), а именно, тожественныя преобразованія выраженій: ($\log abcde...$), $\log 1$, $\log \frac{a}{b}$, $\log x^n$ (при n—цѣломъ и дробномъ, положительномъ и отрицательномъ).

4) Вслѣдъ за опредѣленіемъ логариѳмовъ слѣдуетъ дать ученику «начальную таблицу» логариѳмовъ (обыкновенныхъ трехзначныхъ) для иллюстраціи всѣхъ доказываемыхъ свойствъ на числовыхъ примѣрахъ; тѣмъ самымъ ученики постепенно освоятся съ практикою логариѳмическихъ вычисленій.

5) Передъ изложеніемъ отличительныхъ свойствъ десятичныхъ логариѳмовъ необходимо дать ясное и твердое понятіе о множественности логариѳмическихъ системъ, и это очень легко сдѣлать помимо представленія о логариѳмѣ, какъ о показателѣ степени того или другого основанія. Соотвѣтственные числовые примѣры: 1) рельефно показываютъ значеніе «основанія» логариѳмической системы и, въ частности, основанія, равнаго 10; и 2) служатъ превосходною подготовкою къ общей формулѣ перехода отъ одной логариѳмической системы къ другой (самый же выводъ общей формулы слѣдуетъ отнести ко 2-му циклу).

6) Изложеніе свойствъ десятичныхъ логариѳмовъ можетъ почти совпасть съ обычнымъ; однако, при предлагаемомъ методическомъ планѣ у учениковъ будетъ серьезное преимущество: всѣ новыя правила можно наглядно иллюстрировать

на числовыхъ примѣрахъ съ помощью усвоенныхъ уже трехзначныхъ логариомовъ.

Кромѣ того, полезно въ этой главѣ исправить неточное или, во всякомъ случаѣ, недостаточное опредѣленіе характеристики логариома, обычно допускаемое въ общепринятыхъ руководствахъ элементарной алгебры.

7) Можно затѣмъ непосредственно перейти къ пятизначнымъ таблицамъ. Опытъ показываетъ, что ученики, освоившіеся съ основными понятіями при помощи трехзначныхъ логариомовъ, легко и быстро усваиваютъ практику пятизначныхъ логариомовъ.

Впрочемъ, небезполезно перейти сначала къ четырехзначнымъ логариомамъ. Во 1), они достаточны для многихъ вычисленій реальнаго характера, и вычисленія, съ помощью готовыхъ «поправокъ», совершаются значительно быстрѣе, чѣмъ съ пятизначными: поэтому при рѣшеніи опредѣленнаго числа задачъ получится серьезная экономія труда и времени, какъ для учениковъ, такъ и для преподавателя; во 2), на таблицѣ 4-хъ значныхъ логариомовъ, вмѣстѣ съ ихъ «поправками» умѣщающейся на двухъ страницахъ, очень удобно показать устройство таблицъ «съ двойнымъ входомъ». Это будетъ добавочною подготовкою къ быстрому усвоенію пятизначныхъ таблицъ, если затѣмъ перейти къ обычнымъ таблицамъ Пржевальскаго.

Примѣчаніе. При пользованіи таблицами и вообще при логариомическихъ вычисленіяхъ возникаетъ не мало методическихъ вопросовъ, которые также ждутъ своей разработки.

8) Завершеніемъ перваго цикла,—или дополненіемъ къ нему,—можетъ явиться опредѣленіе логариома, какъ показателя степени нѣкотораго основанія. Тогда ученики, проработавшіе указанный учебный планъ, оказываются отлично подготовленными къ новой для нихъ точкѣ зрѣнія и, какъ показываетъ опытъ, легко и уже сознательно усваиваютъ,—въ какихъ-нибудь 2 или 3 урока,—обычное изложеніе теоріи логариомовъ.

9) Содержаніе и характеръ в т о р о г о ц и к л а будутъ зависѣть, прежде всего, отъ общаго учебнаго плана математики

въ средней школѣ. Если считаться съ существующими нормами учебнаго времени, то характеръ второго цикла будетъ преимущественно повторительный, и онъ начнется съ дополненія, указаннаго въ пунктѣ 8; кромѣ того, въ него войдутъ тѣ отрывочныя свѣдѣнія о различныхъ системахъ логариѳмовъ и общая формула перехода отъ одной системы къ другой, опредѣленіе степени погрѣшности въ логариѳмическихъ вычисленіяхъ и вообще тѣ дополненія, которыя помѣщаются «мелкимъ шрифтомъ» въ общепринятыхъ руководствахъ. Разница будетъ лишь та, что ученики окажутся гораздо лучше подготовленными.

10) Желательно, однако, одно важное дополненіе: болѣе подробное и, главное, болѣе наглядное изученіе показательной функціи и логариѳмической, составленіе соотвѣтственныхъ графиковъ и пр.

Это дополненіе не только необходимо—оно вполнѣ возможно и въ рамкахъ отводимаго нынѣ учебнаго времени. Дѣйствительно, указываемый учебный планъ даетъ, въ общемъ результатѣ, значительную экономію въ учебномъ времени, нынѣ затрачиваемомъ въ средней школѣ на изученіе логариѳмовъ.

Пренія по докладу Б. А. Марковича.

М. Р. Блюменфельдъ (Спб.). „Предлагаемое опредѣленіе логариѳма затемняетъ понятіе о сущности логариѳма, какъ о корнѣ ур-ія $a^x = N$. Дѣйствительно: 1) алгебра не знаетъ понятія log N безъ указанія основанія, при которомъ онъ взятъ; 2) чиселъ, удовлетворяющихъ равенству: $\log a + \log b = \log ab$—безчисленное множество; 3) абсолютно не выясняется, что логариѳмъ числа N (если N не есть раціональная степень основанія) есть число ирраціональное; 4) $\log a$ опредѣляется въ зависимости отъ произвольнаго числа b, что является непонятнымъ; 5) непонятно, почему это опредѣленіе относится лишь къ положительнымъ значеніямъ a и b; 6) непонятно, какъ слѣдуетъ понять задачу о переходѣ отъ одной системы логариѳмовъ къ другой. Далѣе: никакихъ облегченій предлагаемый пріемъ не вноситъ. Вѣроятнымъ слѣдствіемъ такого опредѣленія логарифма въ связи съ употребленіемъ логариѳмическихъ таблицъ явится то, что у учениковъ установится весьма нежелательный

взглядъ на цѣль введенія логариѳмовъ, а именно лишь какъ на средство упрощенія вычисленій. Наконецъ, гдѣ неоднократно подчеркнутое съѣздами и столь необходимое выясненіе функціональной зависимости?

Проф Д. Д. Мордухай-Болтовской (Варшава) отмѣчаетъ опасность, которая можетъ возникнуть при необходимомъ, въ будущемъ, переходѣ отъ предлагаемаго докладчикомъ опредѣленія логариѳма къ опредѣленію логариѳма, какъ показателя степени, такъ какъ ученика приходится при этомъ переходѣ перевоспитывать. Затѣмъ оппонентъ указываетъ на то, что функціональное управленіе—

$$\varphi\ (ab)=\varphi(a)+\varphi(b),$$

которымъ опредѣляется докладчикомъ логариѳмъ, является болѣе чуждымъ ученикамъ, чѣмъ трансцендентное уравненіе $a^x=N$, съ помощью котораго обычно опредѣляется логариѳмъ.

С. Б. Шарбе (Екатеринославъ) указываетъ,что возможны два способа изложенія главы о логариѳмахъ. Первый способъ, который изложенъ докладчикомъ,состоитъ въ томъ, что на первый планъ выдвигается сущность логариѳмовъ, какъ орудія вычисленія. Второй выдвигаетъ въ первую очередь логариѳмическую функціональную зависимость. Та форма изложенія, которую далъ докладчикъ, можетъ показаться учащимся фокусомъ, сущности котораго преподаватель вначалѣ не излагаетъ. Въ обычномъ же способѣ изложенія изъ равенства $c=a^b$, вслѣдствіе отсутствія закона перемѣстительности, необходимо слѣдуетъ, вполнѣ понятная для учащихся, возможность двухъ обратныхъ операцій: $a=\sqrt[b]{c}$ и $b=\log_a c$. Вначалѣ можно даже не сообщать опредѣленія логариѳма. Учащіеся должны прежде всего усвоить себѣ и привыкнуть къ троякому обозначенію одного и того же соотношенія между тремя числами. Что касается до механизма вычисленій помощью логариѳмовъ, то достаточно таблицу логариѳмовъ временно замѣнить такой: $1=10^{0,000}$, $2=10^{0,301}$, $3=10^{0,477}$, $4=10^{0,602}$, $5=10^{0,699}$, $6=10^{0,778}$ и т.д. и показать на этой таблицѣ, что умноженіе сводится къ сложенію показателей. Затѣмъ можно показать, что дѣйствительно, напр.,

$$\log\ (2\times3)=\log\ 2+\log\ 3.$$

Послѣ такихъ разъясненій врядъ ли найдутся учащіеся, для которыхъ глава о логариѳмахъ будетъ трудной или останется непонятной.

П. О. Рабиновичъ (Перновъ) считаетъ, что и при обычной постановкѣ статьи о логариѳмахъ и логариѳмическихъ вычисленіяхъ учащіеся быстро и хорошо усваиваютъ эту статью. Все

зависитъ отъ учителя. По мнѣнію оппонента, предложеніе докладчика начинать съ равенства

$$\log ab = \log a + \log b$$

нельзя считать цѣлесообразнымъ.

Я. Г. Саръ (Юрьевъ). «Предложеніе докладчика не ново, оно вполнѣ опредѣленно высказано уже А. Влаккомъ въ 1633 году. По моему, слѣдовало бы разсматривать логариѳмы въ обыкновенныхъ пятизначныхъ таблицахъ, какъ цѣлые показатели:

$$\sqrt[100.000]{10} = 1{,}000023.$$

Тогда всѣ теоремы относительно дѣйствій надъ логариѳмами отпали бы, вслѣдствіе знакомства съ дѣйствіями надъ цѣлыми степенями. Далѣе слѣдовало бы знакомить учащихся съ удивительнымъ методомъ Нэпира для вычисленія логариѳмовъ. Этимъ методомъ дается возможность вычислить четырехзначныя таблицы въ какіе-нибудь три-четыре часа. Въ доказательство этого укажу на то, что для пробы здѣсь же, въ залѣ засѣданій, я вычислилъ 230 логариѳмовъ чиселъ, расположенныхъ между 1 и 10».

П. С. Лунаковъ (Одесса). «Есть хорошая русская поговорка: «отъ добра добра не ищутъ». Методъ, предлагаемый докладчикомъ, не лучше стараго: 1) при переходѣ къ новымъ понятіямъ мы должны считаться съ тѣмъ, что они поражаютъ ученика именно своей новизной и неожиданностью. Равенство же $\lg ab = \lg a + \lg b$ является гораздо болѣе неожиданнымъ и непонятнымъ, чѣмъ обычное опредѣленіе логариѳма; 2) предлагаемый методъ грѣшитъ противъ двухъ основныхъ принциповъ, которые такъ недавно провозглашались съ этой каѳедры: принципа наглядности и концентрическаго расположенія матерьяла. Равенство $\lg ab = \lg a + \lg b$ абсолютно никакой наглядностью не обладаетъ; 3) нельзя трактовать о вещахъ, не доказавъ ранѣе ихъ существованія. Поэтому нельзя писать соотношенія $\lg ab = \lg a + \lg b$, если не доказано, что существуютъ числа, ему удовлетворяющія».

С. Г. Колонъ (Перновъ, Лифл. губ.). «Не рѣдки случаи, когда молодые люди въ высшихъ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ безъ труда пріучаются пользоваться логариѳмической линейкой. Но при этомъ они часто затрудняются отвѣтить на вопросъ о томъ, на чемъ основаны устройство и пользованіе упомянутой линейкой. Это происходитъ отъ того, что въ средней школѣ не обращается достаточнаго вниманія на связь, существующую между прогрессіями и логариѳмами. Если имѣть въ виду эту связь, то, съ методической точки зрѣнія, переходъ отъ отдѣла прогрессій къ логариѳмамъ является простымъ, нагляднымъ и естественнымъ».

Б. А. Марковичъ (Спб.). «Я чрезвычайно благодаренъ послѣднему оппоненту, который существенно облегчилъ мнѣ задачу возразить остальнымъ. Въ самомъ дѣлѣ: онъ предложилъ одинъ изъ возможныхъ (и дѣйствительно существующихъ) варіантовъ начальнаго изложенія отдѣла логариѳмовъ. А передъ этимъ два другихъ оппонента разсказали, какъ они «подходятъ» къ изложенію этого отдѣла, что̀ они считаютъ полезнымъ добавить или измѣнить. Такимъ образомъ, не я, а оппоненты, несмотря на то, что, «отъ добра добра не ищутъ», сами доказали, что возможно и полезно отступать отъ обычнаго изложенія. Что касается громаднаго большинства остальныхъ возраженій, то они представляютъ собою цѣлую сѣть явныхъ недоразумѣній. Я излагалъ то, что считаю *содержаніемъ* начальнаго цикла. А мнѣ возражаютъ, что эта постановка вопроса ненаучна. Но въ томъ-то и дѣло, что *теорія* логариѳмовъ, при существующихъ условіяхъ, *не можетъ* быть дана въ научной обработкѣ. Поэтому-то я и предлагаю давать основныя предложенія безъ доказательствъ. Этимъ оппонентамъ я отвѣчу, что мой «начальный циклъ» болѣе строгъ въ научномъ отношеніи, потому что онъ не скрываетъ своихъ постулатовъ, а существующее изложеніе скрываетъ нѣсколько постулатовъ и въ доказательствѣ основныхъ свойствъ логариѳмовъ примѣняетъ положенія, доказываемыя для раціональныхъ показателей, распространяя ихъ безъ всякой оговорки на совершенно невѣдомыя учащемуся показатели.

Другіе оппоненты находятъ мое изложеніе «слишкомъ научнымъ», слишкомъ труднымъ для учениковъ. Вѣрно, и это какъ разъ я считаю достоинствомъ предлагаемаго перваго цикла: онъ соединяетъ простоту понятій со строгимъ проведеніемъ ихъ взаимной зависимости. Но тѣмъ и другимъ я скажу еще, что они возражаютъ лишь противъ одной половины моихъ предложеній. Они обратили вниманіе на элементы теоріи. Но въ этомъ циклѣ важнѣе всего облегченіе практики логариѳмическихъ вычисленій съ помощью таблицы трехзначныхъ логариѳмовъ вмѣсто пятизначныхъ, переходъ къ которымъ, при этой постановкѣ, весьма легокъ. Указываютъ также, что мой первый циклъ представляетъ методическія трудности, едва-ли не большія, чѣмъ обычный способъ. Это только ихъ мнѣніе, притомъ не доказанное. Но у большинства моихъ оппонентовъ звучитъ одна общая нота, на которую позвольте мнѣ отвѣтить совершенно серьезно слѣдующимъ примѣромъ. Я знаю одного чрезвычайно опытнаго, превосходнаго въ своей сферѣ преподавателя, который на всѣ предложенія о «новшествахъ» непремѣнно отвѣчалъ: «къ чему? Нѣтъ такого отдѣла въ курсѣ, котораго ученикъ не могъ бы понять. Если онъ сразу не понялъ, объясни ему еще разъ, если мало — два, три

раза, хоть четыре, пять, и въ шестой разъ онъ будетъ знать. А если онъ и въ шестой разъ не пойметъ, то незачѣмъ ему и учиться математикѣ». Это—точка зрѣнія очень опредѣленная, очень ясная, и этотъ преподаватель, конечно, на нашъ Съѣздъ не записался.

Съ моей стороны было бы большимъ самомнѣніемъ думать, что предложенная мною точка зрѣнія не содержитъ никакихъ ошибокъ. Скажу только, что я представилъ не скороспѣлую фантазію, а составилъ курсъ, проработалъ его, провожу его уже третій годъ и смѣю увѣрить, что онъ далъ хорошіе результаты. Даже въ 6-омъ классѣ женской гимназіи ученицы безъ всякаго ущерба для остальныхъ частей курса свободно вычисляютъ съ пятизначными логариѳмами, а въ 7-омъ классѣ, когда я долженъ излагать обычную теорію логариѳмовъ, онѣ усваиваютъ ее въ два урока,—если не считать необходимыхъ дополненій. Я далекъ отъ мысли просить резолюціи Съѣзда о немедленномъ введеніи защищаемой мною точки зрѣнія въ учебный планъ средней школы. Но я въ правѣ просить, чтобы вы содѣйствовали, по возможности активно, производству опытовъ, уже вошедшихъ въ обиходъ нѣкоторыхъ школъ Зап. Европы».

С. И. Шохоръ-Троцкій (Спб.). «Ученіе о логариѳмахъ, сводящееся къ тому, что логариѳмъ есть функція, удовлетворяющая извѣстнымъ функціональнымъ уравненіямъ, давно уже стало достояніемъ науки. Стремленія Б. А. Марковича сводятся только къ тому, чтобы сдѣлать этотъ взглядъ плодотворнымъ въ дидактическомъ и методическомъ отношеніяхъ въ школѣ. Должно отмѣтить, что трудность этого взгляда для учащихся еще ничего не доказываетъ. Во-первыхъ, опыты въ этомъ направленіи сдѣланы весьма немногими изъ насъ, во-вторыхъ, методика вовсе не требуетъ того, чтобы учащимся все давалось безъ труда. Безъ труда со стороны учащихся обученіе математикѣ было бы не только безполезнымъ, но даже прямо вреднымъ. Трудъ долженъ быть только посильнымъ для учащихся. Наконецъ, въ третьихъ, освобожденіе обученія отъ *излишнихъ* трудностей есть уже дѣло практической и теоретической методики, и докладъ Б. А. Марковича представляетъ собою призывъ къ работѣ въ намѣченномъ имъ направленіи".

По предложенію предсѣдателя секціи, Б. А. Марковичу выражена благодарность за предоставленіе въ распоряженіе членовъ секціи извѣстнаго количества экземпляровъ брошюры докладчика подъ заглавіемъ: «Къ докладу Б. А. Марковича о желательныхъ измѣненіяхъ въ преподаваніи теоріи и практики логариѳмовъ».

X. О графическомъ методѣ рѣшенія системы уравненій.

Докладъ Д. Э. Теннера (Спб.).

«Въ новыхъ теченіяхъ въ области преподаванія математики и въ частности алгебры въ среднихъ и даже низшихъ уч. заведеніяхъ ясно сказались тенденціи снабжать графическими иллюстраціями зависимости, выраженныя аналитически, а также давать рѣшенію ур-ій геометрическія интерпретаціи.

Рѣшеніе ур-ія 1-ой степени съ однимъ неизвѣстнымъ можетъ трактоваться, какъ пересѣченіе прямой вида $y=ax+b$ съ осью x — овъ. Система двухъ ур-ій разрѣшается графически розысканіемъ координатъ точки пересѣченія ихъ. По этимъ и исчерпывается вопросъ о графическихъ интерпретаціяхъ рѣшенія системы линейныхъ ур-ій.

Настоящій докладъ имѣетъ цѣлью показать возможность графическаго рѣшенія на плоскости системы болѣе 2-хъ ур-ій и значеніе этого пріема, какъ иллюстраціи координированнаго измѣненія двухъ величинъ.

Пусть имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} f_1\ (x,\ y,\ z)=o \\ f_2\ (x,\ y,\ z)=o \\ f_3\ (x,\ y,\ z)=o \end{aligned}\right\}\ \text{(I)},$$

гдѣ функціи f_1, f_2 и f_3 имѣютъ видъ

$$a_1\ x+b_1\ y+c_1\ z+d_1.$$

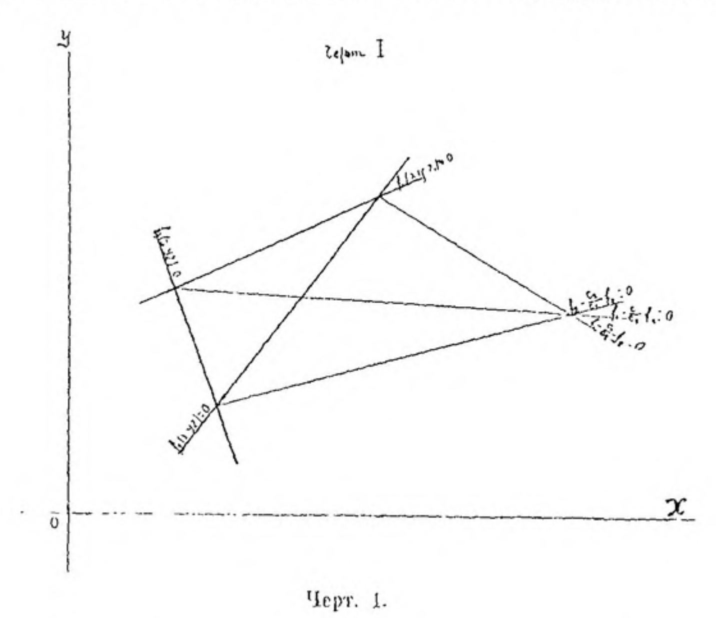
Дадимъ z произвольное значеніе z_1, тогда система ур-ій (I) дастъ новую систему

$$\left.\begin{aligned} f_1\ (x,\ y,\ z_1)=o \\ f_2\ (x,\ y,\ z_1)=o \\ f_3\ (x,\ y,\ z_1)=o \end{aligned}\right\}\ \text{(II)},$$

причемъ въ каждое уравненіе будутъ входить двѣ перемѣнныя. А потому на плоскости можно построить прямыя, отвѣча-

ющія каждому изъ ур-ій системы (II). Построивъ три прямыя системы (II), получимъ, вообще говоря, 3 точки ихъ пересѣченія, см. черт. I.

Начнемъ теперь разсматривать z, какъ перемѣнный параметръ. Тогда каждому значенію z будетъ отвѣчать опредѣленная система 3-хъ, вообще говоря, пересѣкающихся прямыхъ, всегда параллельныхъ соотвѣтственно прямымъ другой системы,



Черт. I.

полученной при другомъ какомъ-либо значеніи z (коэффиціенты при x и y отъ z не зависятъ).

Докажемъ, что точки пересѣченія каждой пары прямыхъ будутъ двигаться по прямой и что эти послѣднія прямыя (всѣ 3), въ случаѣ если система I имѣетъ корни, пересѣкутся въ одной точкѣ при нѣкоторомъ опредѣленномъ значеніи z_0, одинаковомъ для всѣхъ 3-хъ ур-ій. Ур-іе

$$f_1 (x, y, z_1) + l_1 f_2 (x, y, z_1) = o \quad \text{(III)}$$

представляетъ общій видъ ур-ій всѣхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ

$$f_1 (x, y, z_1) = o \text{ и } f_2 (x, y, z_1) = o.$$

Въ ур-іи (III) l_1 можно давать произвольныя значенія въ томъ числѣ и такое, при которомъ члены, содержащіе z, исчезнуть. Для этого стоитъ лишь положить $l_1 = -\frac{c_1}{c_2}$.

При такомъ значеніи l_1 ур-іе будетъ удовлетворяться координатами точекъ пересѣченія прямыхъ f_1 и f_2, отвѣчающихъ любымъ значеніямъ z.

Пусть нѣкоторому значенію z_2 отвѣчаетъ точка пересѣченія прямыхъ f_1 и f_2, координаты которой будутъ x_2 и y_2. Тогда имѣетъ мѣсто слѣдующее тожество:

$$f_1 \ (x_2, y_2, z_2) + l f_2 \ (x_2, y_2, z_2) = o \qquad \text{(IV)}$$

при любомъ значеніи l, а, слѣдовательно, и при $l = -\frac{c_1}{c_2}$, при которомъ члены, содержащіе z_2, сократятся и тожество это не нарушится, если на мѣсто z_2 подставить любое значеніе въ томъ числѣ и z; при этомъ тожество (IV) приметъ видъ:

$$f_1 \ (x_2, y_2, z_1) + l_1 f_2 \ (x_2, y_2, z_1) = o \qquad \text{(V)},$$

которое можно разсматривать, какъ полученное изъ ур-ія (III) путемъ подстановки въ него координатъ x_2 и y_2 точки пересѣченія прямыхъ f_1 и f_2, отвѣчающихъ значенію z, отличному отъ z_1. Отсюда слѣдуетъ, что координаты точки пересѣченія прямыхъ f_1 и f_2, отвѣчающихъ любому значенію z, удовлетворятъ ур-ію

$$f_1 \ (x, y, z_1) - \frac{c_1}{c_2} \ (x, y, z_1) = o, \qquad \text{(VI)}$$

гдѣ вмѣсто z_1 можно взять любое число, хотя-бы и o, при которомъ V приметъ видъ

$$f_1 (x, y, o) - \frac{c_1}{c_2} f_2 (x, y, o) = o \qquad \text{(VII)}$$

Итакъ, точки пересѣченія прямыхъ $f_1 = o$; $f_2 = o$ и $f_3 = o$, взятыхъ попарно, лежатъ на прямыхъ, ур-ія которыхъ получаются путемъ исключенія z изъ ур-ій системы (I).

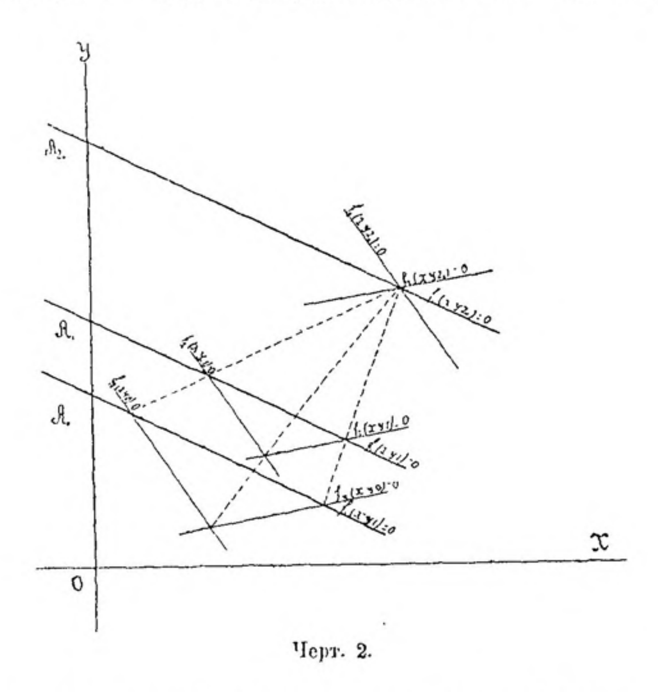
Примѣняя приведенныя выше разсужденія къ точкамъ пересѣченія f_1 съ f^3 и f^2 съ f_3, получимъ слѣдующія три ур-ія

$$\left.\begin{aligned} f_1\,(x, y, o) - \frac{c_1}{c_2} f_2\,(x, y, o) = o\ (1) \\ f_1\,(x, y, o) - \frac{c_1}{c_3} f_3\,(x, y, o) = o\ (2) \\ f_2\,(x, y, o) - \frac{c_1}{c_3} f_3\,(x, y, o) = o\ (3) \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{VIII})$$

Ур-іе 3-е изъ (VIII) принадлежитъ къ типу

$$f_1\,(x, y, o) + -\frac{c_1}{c_2} f_2\,(x, y, o)\} - l\,\{f_1\,(x, y, o) - \frac{c_1}{c_3} f_3\,(x, y, o)\} = O, \quad (\mathrm{IX})$$

а именно, при $l = 1$, ур-іе (IX) даетъ ур-іе 3-е изъ системы (VIII).



Черт. 2.

Слѣдовательно, третья прямая проходитъ черезъ точку пересѣченія первыхъ двухъ.

Остается показать, что если черезъ точку пересѣченія провести три прямыхъ $f_1\,(x, y, z_0) = o$, $f_2\,(x, y, z_0') = o$ и $f_3\,(x, y, z_0'') = o$, то значеніе $z_0 = z_0' = z_0''$.

Дѣйствительно, если $f_2\,(x_0, y_0, z_0) = o$, гдѣ x_0 и y_0 суть координаты точки пересѣченія, то изъ ур-ія VI слѣдуетъ, что $f_2\,(x_0, y_0, z_0) = o$; но $f_2\,(x_0\ x_0\ z_0')$ также $= o$, слѣдовательно, $z_0' = z_0$; такъ же можно показать, что и $f_3\,(x_0, y_0, z_0) = o$;

откуда слѣдуетъ, что прямыя $f_1(x, y, z_0) = o$; $f_2(x, y, z_0) = o$ и $f_3(x, y, z_0) = o$ проходятъ черезъ точку x_0, y_0.

Остается показать, какимъ образомъ графически опредѣлить величину z_0.

Положимъ, мы построили систему прямыхъ $f_1(x, y, o) = o$, $f_2'(x, y, o) = o$ и $f_3(x, y, o) = o$, другую систему $f_1(x, y, 1) = o$, $f_2(x, y, 1) = o$ и $f_3(x, y, 1) = o$ и третью систему $f_1(x, y, z_0) = o$; $f_2(x, y, z_0) = o$ и $f_3(x, y, z_0) = o$ (см. черт. 2). Продолжимъ всѣ три прямыхъ f_1 до пересѣченія съ осью y. Тогда отрѣзокъ $A_0\ A_1$ дастъ величину приращенія отрѣзка на оси y при приращеніи z на 1 (отъ 0 до 1), а отрѣзокъ $A_0\ Az_0$ представитъ приращеніе отрѣзка на оси y, отвѣчающее приращенію z отъ o до величины z_0. А т. к. приращеніе отрѣзка на оси y пропорціонально приращенію z, то для полученія значенія z_0 стоитъ лишь измѣрить $A_0\ A_{z_0}$ при помощи отрѣзка $A_0\ A_1$.

Такимъ образомъ между рѣшеніемъ системъ ур-ій путемъ исключенія неизвѣстнаго и графическимъ рѣшеніемъ устанавливается полная аналогія. Приводимый пріемъ служитъ не только для иллюстраціи рѣшенія системы ур-ій, но и для уясненія линейной функціональной зависимости и того, что если измѣненіе свободныхъ членовъ ур-ій будетъ подчинено опредѣленному закону, то движеніе точки пересѣченія прямыхъ будетъ происходить по опредѣленному закону. Именно, если приращеніе свободныхъ членовъ ур-ій будетъ пропорціонально другъ другу, то точка пересѣченія прямыхъ будетъ двигаться по прямой.

Нетрудно показать, что приведенный пріемъ можетъ быть распространенъ и на систему болѣе трехъ ур-ій.

Возьмемъ систему линейныхъ ур-ій

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z, t) = o \\ f_2(x, y, z, t) = o \\ f_3(x, y, z, t) = o \\ f_4(x, y, z, t) = o \end{aligned}\right\} \quad (X),$$

гдѣ f_1, f_2, f_3 и f_4—функціи вида $a_1x + b_1y + c_1z + d_1t + e_1$.

Дадимъ t произвольное значеніе t_1, тогда система (X) дастъ:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z, t_1) &= o \\ f_2(x, y, z, t_1) &= o \\ f_3(x, y, z, t_1) &= o \\ f_4(x, y, z, t_1) &= o \end{aligned}\right\} \text{(XI)}.$$

Черт. 3.

Каждое изъ ур-ій системы (XI) представляетъ ур-іе плоскости, отнесенное къ системѣ трехъ координатъ; плоскости эти, вообще говоря, пересѣкаясь, ограничатъ нѣкоторый тетраэдръ $A\ B\ C\ D$ (см. черт. 3).

Слѣды же этихъ плоскостей на плоскости $X\ Y$ дадутъ 4 прямыя, пересѣкающіяся въ 6 точкахъ ab, ac, ad, bc, bd и cd.

Ур-ія слѣдовъ будутъ:

$$\left.\begin{array}{l} f_1\,(x, y, o, t_1)=o \\ f_2\,(x, y, o, t_1)=o \\ f_3\,(x, y, o, t_1)=o \\ f_4\,(x, y, o, t_1)=o \end{array}\right\}\ \text{(XII)}.$$

Если t трактовать, какъ перемѣнный параметръ, то:

1) плоскости начнутъ перемѣщаться параллельно самимъ себѣ;

2) прямыя ихъ пересѣченія будутъ двигаться въ нѣкоторыхъ плоскостяхъ;

3) пересѣченіе этихъ плоскостей будетъ происходить частью по три по общей прямой, частью по двѣ;

4) соотвѣтственно 2) и 3) пересѣченіе слѣдовъ плоскостью (XI) будетъ перемѣщаться по прямымъ, которыя пересѣкутся частью по три, частью по двѣ;

5) наступитъ моментъ при нѣкоторомъ t_0, когда всѣ плоскости пересѣкутся въ одной точкѣ.

Первое слѣдствіе явствуетъ изъ того, что коэффиціенты при x, y и z отъ t не зависятъ. Чтобы вывести 2-ое слѣдствіе, замѣтимъ, что общій видъ ур-ій всѣхъ плоскостей, проходящихъ черезъ пересѣченіе плоскостей f_1 и f_2, будетъ:

$$f_1\,(x, y, z, t_1)+l_1\,f_2\,(x, y, z, t_1)=o \qquad \text{(XIII)}.$$

Если положить $l_1=-\frac{d_1}{d_2}$, то (XIII) даетъ ур-іе плоскости, въ которой лежатъ всѣ прямыя пересѣченія плоскостей $f_1=o$ и $f_2=o$, т. к. ур-іе (XIII) при $l_1=-\frac{d_1}{d_2}$ отъ t не зависитъ.

Уравненія плоскостей, содержащихъ всѣ прямыя пересѣченій плоскостей, попарно будутъ:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x, y, z, t) - \frac{d_1}{d_2} f_2(x, y, z, t) = o \ (1) \\ f_1(x, y, z, t) - \frac{d_1}{d_3} f_3(x, y, z, t) = o \ (2) \\ f_1(x, y, z, t) - \frac{d_1}{d_4} f_4(x, y, z, t) = o \ (3) \\ f_2(x, y, z, t) - \frac{d_2}{d_3} f_3(x, y, z, t) = o \ (4) \\ f_2(x, y, z, t) - \frac{d_2}{d_4} f_4(x, y, z, t) = o \ (5) \\ f_3(x, y, z, t) - \frac{d_3}{d_4} f_4(x, y, z, t) = o \ (6) \end{array}\right\} \text{(XIV)}$$

Положивъ въ нихъ $z = o$, получимъ ур-ія слѣдовъ на плоскости XY.

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x, y, o, t) - \frac{d_1}{d_2} f_2(x, y, o, t) = o \ (1) \\ f_1(x, y, o, t) - \frac{d_1}{d_3} f_3(x, y, o, t) = o \ (2) \\ f_1(x, y, o, t) - \frac{d_1}{d_4} f_4(x, y, o, t) = o \ (3) \\ f_2(x, y, o, t) - \frac{d_2}{d_3} f_3(x, y, o, t) = o \ (4) \\ f_2(x, y, o, t) - \frac{d_2}{d_4} f_4(x, y, o, t) = o \ (5) \\ f_3(x, y, o, t) - \frac{d_3}{d_4} f_4(x, y, o, t) = o \ (6) \end{array}\right\} \text{(XV)}$$

Третье слѣдствіе вытекаетъ изъ слѣдующихъ соображеній: черезъ линію пересѣченія первой и второй плоскости изъ системы (XIV) пройдетъ и четвертая, ибо ур-іе ея принадлежитъ къ виду

$$f_1 + l_1 f_2 + \lambda_1 [f_1 + l_2 f_3] = o \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \text{(XVI)}$$

если λ_1 положить $= - 1$.

Плоскости первая и третья пересѣкутся съ плоскостью пятой по общей прямой по той же причинѣ.

Но черезъ прямую пересѣченія второй и пятой плоскостей не пройдетъ ни одна изъ остальныхъ плоскостей, ибо ни одно изъ остальныхъ ур-ій не принадлежитъ къ виду

$$f_1 + l_2 f_3 + \lambda [f_2 + l_5 f_4] = O \ . \ . \ . \ . \ . \text{(XVII)}$$

Откуда слѣдуетъ, что вершины тетраэдра двигаются по прямымъ.

Чтобы вывести 5-ое слѣдствіе, надо показать, что всѣмъ плоскостямъ, проходящимъ черезъ одну общую имъ всѣмъ точку, отвѣчаетъ одно и то же значеніе параметра t_0.

Пусть x_0, y_0, z_0 координаты точки пересѣченія трехъ плоскостей (1), (2) и (3) изъ системъ (XIV). Можно показать, что (4), (5) и (6) удовлетворяются тѣми же координатами x_0, y_0, z_0, ибо (1) и (2) даетъ

$$-\frac{d_1}{d_2}f_2+\frac{d_1}{d_3}f_3=f_2-\frac{d_2}{d_3}f_3=o$$

и т. д.

Но т. к. точка x_0, y_0, z_0 лежитъ на плоскости движенія линіи пересѣченія плоскостей $f_1(x, y, z, t)=o$ и $f_2(x, y, z, t)=o$, если трактовать t, какъ перемѣнный параметръ, то координаты x_0, y_0, z_0, при нѣкоторомъ опредѣленномъ значеніи t, равномъ t_0, одинаковомъ для обѣихъ плоскостей, удовлетворяютъ и f_1 $(x, y, z, t)=0$ и $f_2(x, y, z, t)=0$.

Изъ тѣхъ же соображеній слѣдуетъ, что координатъ x_0, y_0, z_0 и t_0 удовлетворяютъ также ур-іямъ $f_3=o$ и $f_4=o$. Иначе говоря, существуетъ такое значеніе t, при которомъ всѣ плоскости $f_1=o$, $f_2=o$, $f_3=o$ и $f_4=o$ пересѣкаются въ одной точкѣ.

Имѣя это въ виду, ясно, что если начать двигать плоскость XY параллельно самой себѣ, то всѣ точки пересѣченія второй группы прямыхъ, начавъ двигаться по прямымъ, пересѣкутся въ одной точкѣ, координаты которой суть корни системы; чтобы найти значенія y и t, удовлетворяющія данной системѣ, можно прибѣгнуть къ пріему, данному выше для нахожденія y въ системѣ трехъ ур-ій.

Ходъ графическаго рѣшенія системы четырехъ ур-ій съ 4 перемѣнными будетъ слѣдующій: задаемъ произвольное значеніе для z и t, напримѣръ, по o, и строимъ прямыя:

$$f_1\ (x,\ y,\ o,\ o)=o$$
$$f_2\ (x,\ y,\ o,\ o)=o$$
$$f_3\ (x,\ y,\ o,\ o)=o$$
$$f_4\ (x,\ y,\ o,\ o)=o$$

Оставляя $z = o$, беремъ для t другое значеніе, напримѣръ, 1; строимъ вторую систему прямыхъ

$$
\begin{aligned}
f_1\,(x,\ y,\ o,\ 1) &= o \\
f_2\,(x,\ y,\ o,\ 1) &= o \\
f_3\,(x,\ y,\ o,\ 1) &= o \\
f_4\,(x,\ y,\ o,\ 1) &= o
\end{aligned}
$$

Соотвѣтственныя точки ихъ пересѣченія соединяемъ прямыми, которыя пересѣкутся по три и по двѣ въ семи точкахъ. Затѣмъ, давая частныя значенія z, получимъ движеніе этихъ точекъ по прямымъ, пересѣкающимся въ одной точкѣ координаты которой (x_0 и y_0) будутъ корнями системы ур-ій (X). Корни z_0 и t_0 получимъ, измѣряя приращеніе отсѣкаемаго отъ оси y-ковъ отрѣзка одною изъ прямыхъ, подобно тому какъ это указано выше для случая трехъ ур-ій.

Указанный пріемъ рѣшенія системы уравненій возможно распространить и на систему, состоящую изъ большаго числа ур-ій съ большимъ числомъ перемѣнныхъ».

По предложенію предсѣдателя секціи, докладчику была выражена благодарность за его интересный и не содержащій въ себѣ ничего спорнаго докладъ, представляющій собою цѣнный вкладъ въ ученіе о геометрической интерпретаціи свойствъ системы уравненій. Преніе же, за позднимъ временемъ, не состоялись.

Четвертое засѣданіе.

2 Января 1912 г. 8 час. веч.

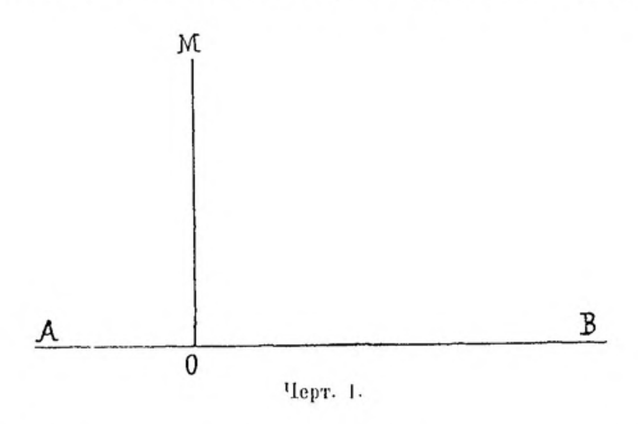
XI. О первой теоремѣ элементарной геометріи Евклида.

Докладъ И. М. Травчетова (Спб.).

«Французскіе математики, съ Лежандромъ во главѣ, до сего времени, интерпретируя «Начала» Евклида, въ числѣ начальныхъ теоремъ продолжаютъ ставить слѣдующую: «Изъ точки, взятой на прямой въ плоскости, можно въ этой плоскости возставить перпендикуляръ къ этой прямой, и притомъ только одинъ». Всѣмъ извѣстное доказательство этой теоремы «вращеніемъ другой прямой» не вызываетъ сомнѣнія въ возможности существованія такого перпендикуляра, но не даетъ указанія на направленіе его. Между тѣмъ, этотъ недостатокъ доказательства вліяетъ на доказательство возможности существованія биссектрисы угла и на доказательство существованія средины отрѣзка прямой. Нѣкоторые математики (напр., Raffali, въ 1896 г.), для строгаго обоснованія вышеуказанной теоремы, измѣнили порядокъ теоремъ и на первый планъ въ основу разсужденій положили «допущеніе существованія средины отрѣзка» и на основаніи этого доказываютъ возможность одной средины, затѣмъ—существованіе биссектрисы угла и, наконецъ, существованіе перпендикуляра къ прямой, проведеннаго изъ данной на ней точки. Въ настоящемъ докладѣ, безъ всякаго новаго допущенія и съ устраненіемъ выше указаннаго недостатка, представляю строгое доказательство теоремы о перпендикулярѣ къ прямой въ данной на ней точкѣ измѣненіемъ порядка теоремъ, ставя первою слѣдующую теорему:

Теорема I. Изъ точки, взятой внѣ прямой, можно провести такую сѣкущую и притомъ только одну, которая съ данной прямой образуетъ два равныхъ между собою смежныхъ угла.

Доказательство. *a*) Дана прямая AB и точка M внѣ ея; требуется изъ точки M провести такую сѣкущую къ прямой AB, чтобы образовались два равныхъ между собою смежныхъ угла. Перегнемъ плоскость, въ которой лежатъ данныя прямая и точка, и совмѣстимъ верхнюю часть плоскости съ нижнею: тогда точка M совпадетъ съ нѣкоторой точкой N нижней части плоскости. Развернувъ чертежъ, соединимъ точки M и N прямою MN, которая образуетъ съ прямой AB два смежныхъ и равныхъ угла MOB и NOB, потому что при вторичномъ

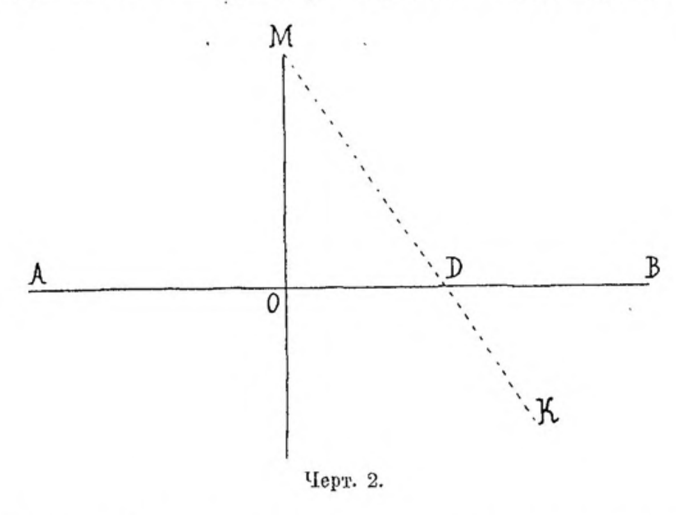


Черт. 1.

наложеніи верхней части плоскости на нижнюю вершина O и стороны угла MOB совпадутъ съ вершиной и сторонами угла NOB. *b*) Чтобы доказать, что MN единственная сѣкущая, обладающая этимъ свойствомъ, допустимъ существованіе еще одной сѣкущей MK, образующей съ прямою AB два равныхъ между собою смежныхъ угла MDB и KDB. Взявъ $DK = DM$, перегнемъ плоскости по прямой AB; тогда точка M совпадетъ съ точкой K, такъ какъ $MDB = KDB$ по предположенію. Но такъ какъ, по построенію, точка M должна упасть въ точку N, то точка KN совпадетъ съ точкою N, и сѣкущая MK сольется съ сѣкущей MN, потому что между двумя точками M и N можно провести одну прямую, слѣдов., нѣтъ дру-

гой сѣкущей, проведенной изъ точки O и образующей съ прямой AB два равныхъ смежныхъ угла.

Опредѣленіе. Прямыя OM и AB, образующія два равныхъ смежныхъ угла, называются взаимно-перпендикулярными. Это обозначается такъ: $MN \perp AB$ и $MO \perp AB$. Каждый изъ двухъ равныхъ между собою смежныхъ угловъ называется прямымъ угломъ и обозначается буквою d, такъ что $AOM + AON = 2\ d$. На основаніи этого опредѣленія нашу теорему можно выразить такъ: «Изъ точки взятой внѣ прямой можно опустить перпендикуляръ къ данной прямой, и притомъ только одинъ».

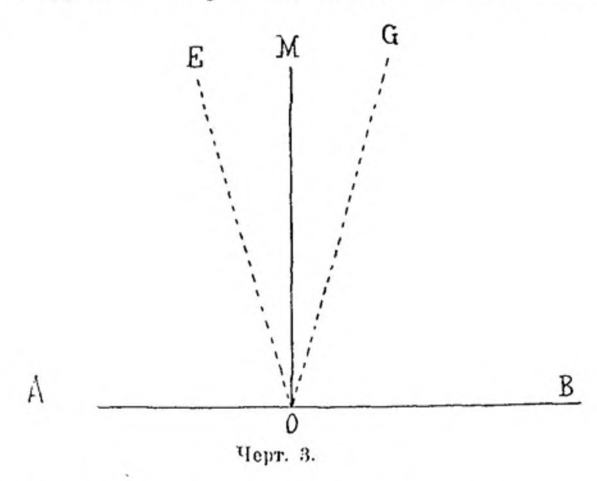


Черт. 2.

Теорема 2. Изъ точки, взятой на прямой, въ данной плоскости можно возставить перпендикуляръ къ этой прямой и притомъ только одинъ.

Доказательство. а) Дана въ плоскости прямая AB и точка O на ней (черт. 3); требуется доказать, что въ этой плоскости можно возставить перпендикуляръ изъ точки O къ прямой AB, притомъ только одинъ. Возьмемъ (черт. 4) прямую CD и точку M внѣ ея; опустимъ изъ точки N перпендикуляръ NK къ прямой CD по предыдущему способу; слѣд. $\angle NKC = \angle NKD$ (1), какъ смежные и равные между собою по 1-й теор.; послѣ этого наложимъ плоскость чертежа $CKND$ на плоскость, въ которой лежитъ прямая AB такъ, чтобы

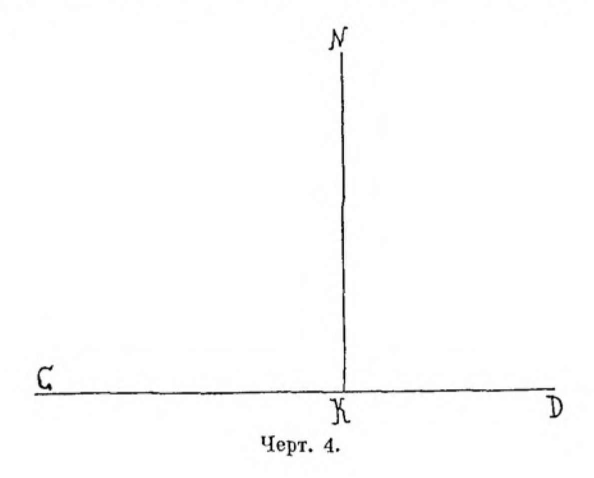
точка N совпала съ точкой O, прямая CD—съ прямой AB, а плоскость угла CKN расположилась надъ прямой AB. Тогда точка N совпадетъ съ нѣкоторой точкой, которую обозначимъ буквой M. Соединивъ точку M съ точкой O прямою линіей, полу-



Черт. 3.

чимъ, что $MO \perp AB$, потому что $\angle\ CAOM = \angle CKM$ и $\angle MOB = \angle NKD$ на основаніи совпаденія вершинъ и сторонъ этихъ угловъ при наложеніи. Принимая же во вниманіе равенство (1), заключаемъ, что $\angle AOM = \angle BOM$, и слѣд. $MO \perp AB$.

в) Для доказательства того, что OM—единственный перпендикуляръ къ прямой AB въ точкѣ O на ней, предполо-



Черт. 4.

жимъ существованіе еще одного перпендикуляра EO. Тогда получимъ, что $\angle AOE = \angle BOE$ (1).

Повернувъ чертежъ около OM, получимъ, что, на основаніи равенства $\angle AOM = \angle BOM$, прямая AO совмѣстится съ OB, и прямая OE займетъ положеніе OG; тогда $\angle AOE = \angle BOG$. Принимая во вниманіе равенство (1), получимъ, что $\angle BOE = \angle BOG$ — что невозможно. Слѣд., нѣтъ другого перпендикуляра изъ точки O въ той же плоскости къ прямой AB.

Далѣе слѣдуютъ уже обычныя теоремы и легко доказать существованіе биссектрисы угла и средины отрѣзка прямой».

Тезисы.

1. Можно доказать существованіе перпендикуляра къ прямой въ данной на ней точкѣ съ указаніемъ точнаго направленія перпендикуляра.

2. Легко доказываются возможность построенія равнодѣлящей даннаго угла и возможность нахожденія средины даннаго отрѣзка прямой.

XII. Построеніе параллелограмовъ.

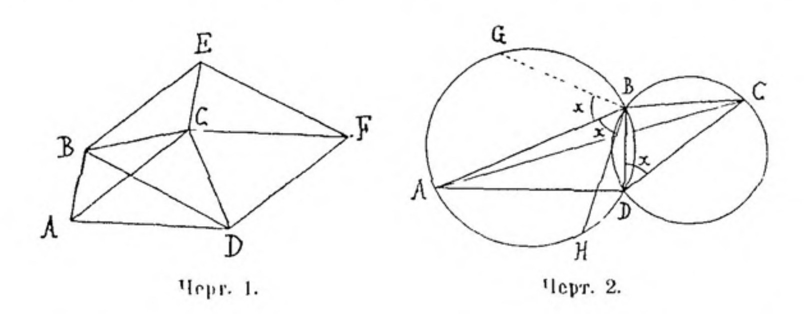
Докладъ И. И. Александрова (Москва).

«Я не безъ намѣренія выбралъ сравнительно узкую тему. Во-первыхъ, нежелательно было, чтобъ на съѣздѣ ни разу не была тронута тема геометрическихъ задачъ на построеніе, имѣющихъ, какъ извѣстно, громадное педагогическое значеніе. Казалось, во-вторыхъ, что мои геометрическія построенія, которыя появляются здѣсь въ первый разъ и, насколько возможно судить, не встрѣчались въ литературѣ, не будутъ неинтересными всему собранію. И, въ третьихъ, и главнымъ образомъ, мнѣ хотѣлось вновь подчеркнуть, что геометрическими задачами на построеніе средняя школа стала заниматься

меньше, въ чемъ *я вижу несомнѣнную и довольно* крупную ошибку.

Извѣстно, что построеніе параллелограмовъ приводится къ построенію треугольниковъ; такого рода задачи считаются сотнями. Уже гораздо рѣже задачи обратнаго характера, въ которыхъ построеніе треугольниковъ приводится къ построенію параллелограмовъ; такія задачи можно считать лишь пятками.

Извѣстно далѣе, что если въ четыреугольникѣ $ABCD$, который называютъ основнымъ, перенести параллельно AB въ CE и AD въ CF, то составится параллелограмъ $BEFD$, имѣющій многія свойства. Во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда данные элементы четыреугольника позволяютъ построить этотъ параллелограмъ и опредѣлить въ немъ точку C, легко отъ



Черт. 1. Черт. 2.

параллелограма перейти къ основному четыреугольнику обратнымъ перенесеніемъ сторонъ. Такого рода задачи встрѣчаются десятками. Спрашивается, нѣтъ ли цѣлаго класса задачъ обратнаго характера, т. е. задачъ на построеніе параллелограмовъ, которыя приводились бы къ построенію основного четыреугольника. Такого рода идея, какъ я убѣжденъ, не должна бы быть новою, но, однако, я не могъ найти въ литературѣ ни этой идеи, ни задачъ такого характера. Ниже показано, что задачи такого рода существуютъ [1]), что всѣ они съ перваго взгляда поражаютъ своей необычною трудностью, однако, довольно легко рѣшаются, если слѣдовать принципу сведенія

[1]) Тема доклада со всѣми подробностями напечатана въ Московскомъ журналѣ «Математическое образованіе».

одной задачи на другую. Изъ имѣющихся у меня примѣровъ выбираю одинъ наиболѣе характерный.

1. Даны 4 прямыя, выходящія изъ точки C. Построить параллелограммъ $BEFD$ съ даннымъ угломъ такъ, чтобы вершины его лежали на данныхъ прямыхъ и чтобы сумма разстояній вершинъ отъ точки C были данной длины.

Въ основномъ четыреугольникѣ $ABCD$, какъ легко видѣть, извѣстны углы, уголъ между діагоналями и периметръ. Испытываемъ методъ подобія: ясно, что если мы сумѣемъ опредѣлить форму искомаго четыреугольника, то уже легко будетъ дать ему надлежащіе размѣры. Замѣчаемъ, что разность угловъ $ABD - BDC = 180° - A - ADB - (D - BDA) = 180° - A - D$, и потому эти разности извѣстны.

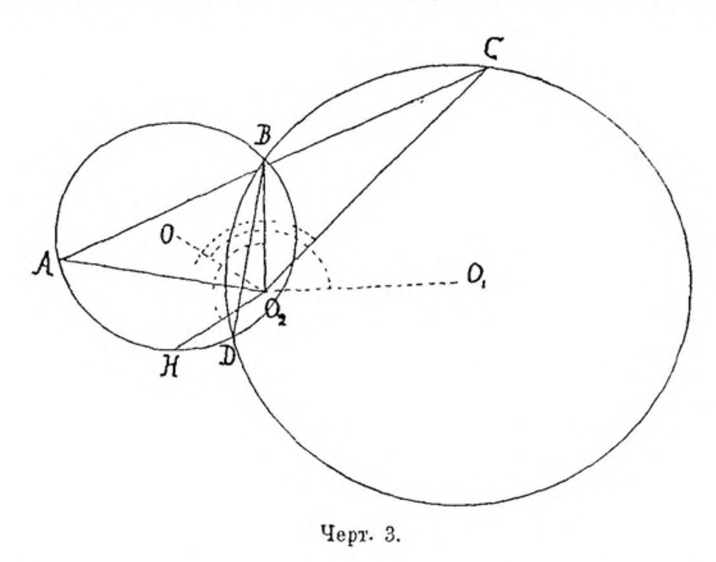
Поэтому, если на произвольной прямой bd опишемъ дуги, вмѣщающія углы A и C, то задача приводится къ слѣдующей.

2. На двухъ пересѣкающихся въ B и D окружностяхъ отыскать по точкѣ A и C такъ, чтобы направленіе AC и разность угловъ ABD и BDC были данныя.

Если мы попробуемъ уравнять искомые углы ABD и BDC, т. е., если мы отложимъ уголъ HBD, равный данной разности, то точка H намъ будетъ извѣстна, дуги же AH и BC будутъ имѣть одинаковую мѣру. Поэтому задача приведена къ слѣдующей:

3. На двухъ окружностяхъ O и O_1 даны точки B и H. Отыскать на нихъ еще по точкѣ a и c такъ, чтобы дуги AH и BC были подобны, а направленіе ac было данное (условіе пересѣченія окружностей дѣлается лишнимъ). Эта задача, несомнѣнно, развилась, какъ обобщеніе одной изъ задачъ Аполлонія Пергейскаго, и рѣшеніе ея извѣстно. Именно, если O_2 есть центръ вращенія, совмѣщающаго дугу AH съ BC, то тр-ки HO_2B и AO_2C подобны: слѣд., для рѣшенія достаточно изъ точки O_2 провести двѣ прямыя, встрѣчающія данное направленіе подъ извѣстными углами. Такъ какъ задача 3-я имѣетъ одно рѣшеніе, то заключаемъ: 1) данная задача имѣетъ тоже одно рѣшеніе; 2) углы четыре-

угольника вмѣстѣ съ угломъ его діагоналей вполнѣ опредѣляютъ видъ четыреугольника. Очевидно, что вмѣсто периметра основного четыреугольника можно было дать его площадь, или сумму діагоналей, или вообще какое-нибудь данное, опредѣляющее размѣры четыреугольника. Соотвѣтственно измѣнятся данные и параллелограмма. Ясно, что этого рода задачи можно варіировать безъ конца, что́ дѣлаетъ основную мысль *доклада методически цѣнной*, тѣмъ *болѣе*, что, *очевидно*, ее легко распространить и на многоугольники. Въ одномъ изъ



Черт. 3.

своихъ докладовъ*) я проводилъ болѣе широкую мысль, а именно: «рѣшить задачу на построеніе это значитъ открыть *первообразъ* искомой фигуры, т. е., тотъ геометрическій зародышъ, изъ котораго развилась искомая фигура путемъ различныхъ преобразованій». Родоначальникомъ искомыхъ фигуръ всегда и неизмѣнно являлся тогда треугольникъ. Такъ и въ нашемъ примѣрѣ. Вся задача развилась изъ треугольника AO_2H. Сначала этотъ треугольникъ былъ умноженъ и повернутъ на нѣкоторый уголъ; получился треугольникъ BO_2C. Тогда

*) См. отдѣльную брошюру «О составленіи и рѣшеніи задачъ на вращеніе» И. Александрова или «Вѣстн. Оп. Физики» 1895 г.

опредѣляется окружность O, которая, при поворотѣ на тотъ же уголъ, преобразовывается въ окружность O_1; опредѣляется точка D, направленіе AC можно взять за извѣстное, и т. д. Такъ что высказанная тогда идея оказывается и на этотъ разъ вѣрною».

XIII. Принципъ совмѣстимости плоскихъ и пространственныхъ фигуръ.

Докладъ Е. С. Томашевича (Москва).

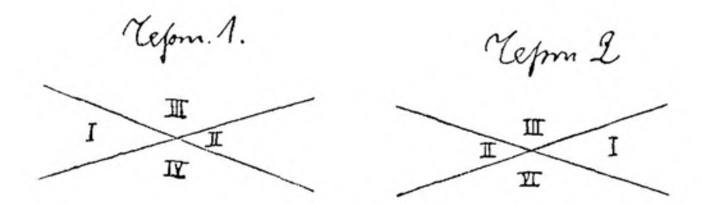
«Я долженъ прежде всего объяснить нѣсколько претенціозное заглавіе своего доклада. Можно было бы сказать: «методъ наложенія». Но тогда пришлось бы спросить, какимъ другимъ, болѣе или менѣе равносильнымъ, можетъ быть замѣненъ этотъ методъ? До тѣхъ поръ пока интуиція не будетъ изгнана изъ элементарной геометріи (а этого, вѣроятно, никогда не будетъ), —наложеніе или, точнѣе, совмѣщеніе фигуръ всегда будетъ занимать свое мѣсто въ элементарномъ курсѣ. Исключать его и замѣнять чѣмъ-нибудь болѣе простымъ не придется. Совмѣщеніе фигуръ нѣчто больше, чѣмъ методъ.

Э. Борель въ своей Géométrie (1908, p. 24) говоритъ, между прочимъ, объ отпечаткахъ, такъ или иначе получаемыхъ съ имѣющихся плоскихъ фигуръ. Но онъ это дѣлаетъ для того, чтобы оправдать существованіе у плоскости двухъ сторонъ. Я же хочу обратить вниманіе на эти отпечатки съ другой точки зрѣнія. Прежде всего, я считаю плоскость принадлежностью какого-нибудь тѣла, и потому пользоваться оборотною стороною ея, вообще говоря, не признаю возможнымъ, да въ этомъ и не вижу надобности.

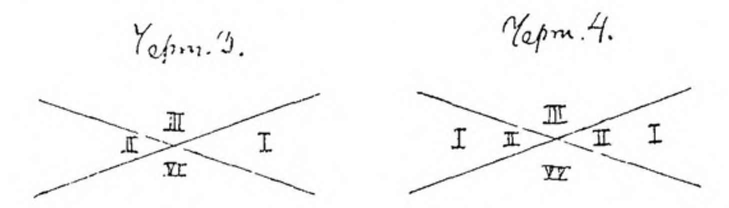
Чтобы быть яснѣе, я укажу на литографскій процессъ. Мы пишемъ сперва на бумагѣ, затѣмъ написанное переводимъ на плоскость литографскаго камня, а оттуда—снова на бумагу. Мы можемъ представить себѣ, что съ этой послѣдней можно перевести еще разъ на камень или на другую бумагу, и т. д. Написанное въ первый разъ назовемъ оригиналомъ, отпечатки

же на чемъ бы то ни было будемъ отмѣчать нумерами по порядку ихъ полученія. Аналогичное представляетъ фотографическій негативъ и снимки.

Возьмемъ за оригиналъ двѣ пересѣкающіяся прямыя (черт. 1) и составляющія углы I, II, III и IV. Сдѣлаемъ съ нихъ на двухъ другихъ плоскостяхъ 2 отпечатка (черт. 2 и 3): реально—со стекляннаго негатива сдѣлаемъ два стеклянныхъ діапозитива.



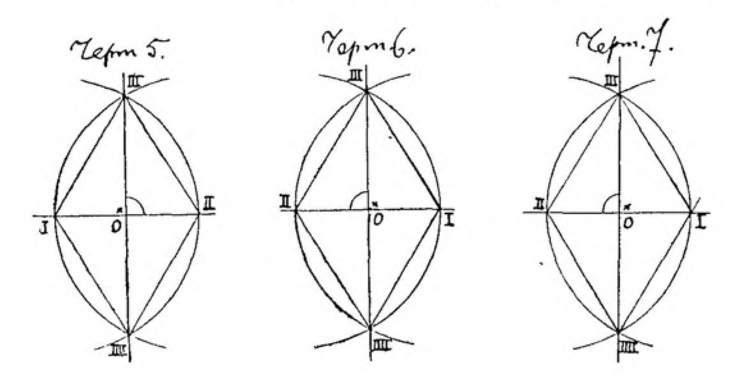
Совмѣстимъ плоскости чертежей 2 и 3 (т. е. діапозитивы) такъ, чтобы углы III и III совпали; тогда совпадутъ и прямыя. Получится фиг. 4, въ которой уголъ II совмѣстится съ I и обратно I со II, слѣд., такъ называемые «вертикальные» углы равны. Подобнымъ же способомъ можно доказать равенство угловъ при основаніи равнобедреннаго треугольника.



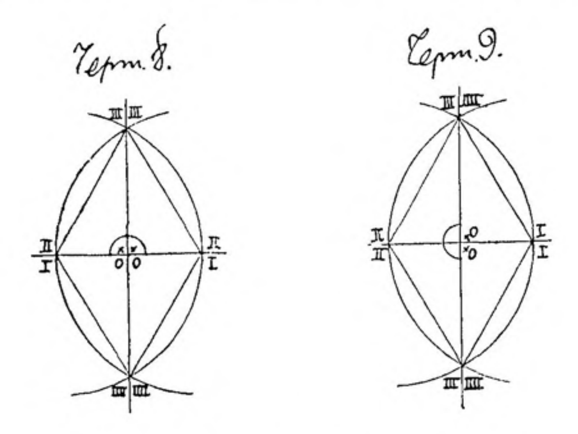
Возьмемъ за оригиналъ фигуру 5, составленную изъ двухъ равныхъ окружностей такъ, что разстояніе ихъ центровъ равно ихъ радіусу. Въ этомъ оригиналѣ проведемъ прямую черезъ точки пересѣченія окружностей и къ этимъ же точкамъ проведемъ радіусы. Съ фигуры 5 получимъ 2 отпечатка (фиг. 6 и 7) и эти отпечатки совмѣстимъ одинъ съ другимъ, начавъ совмѣщеніе съ разстоянія центровъ, т. е. совмѣщая I со II и II съ I.

Здѣсь я опять сошлюсь на Бореля, который въ VIII гл. 1-й части говоритъ: «достаточно одного чертежа, чтобы убѣдиться, что 2 окружности могутъ имѣть 2 общія точки.

Совмѣщеніе чертежей 6 и 7 дастъ чертежъ 8, въ которомъ совмѣстятся точки III съ III и IV съ IV, а, слѣд., и



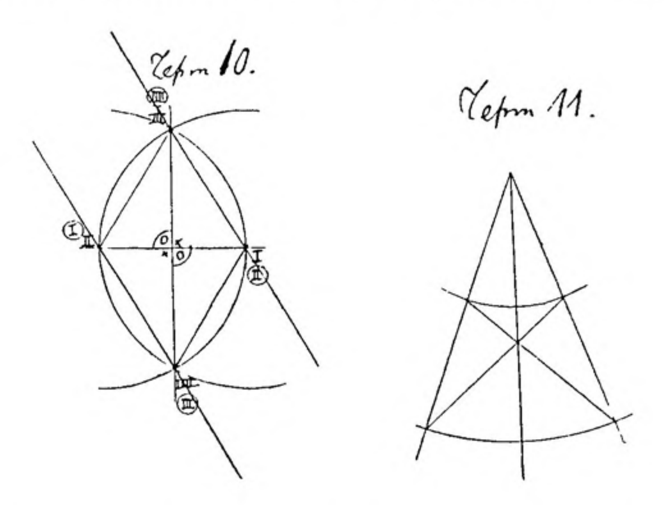
прямыя III, IV. Отсюда ясно, что радіусъ I II раздѣлился точкою O пополамъ, прямыя I II и III IV взаимно перпендикулярны, а углы I III II и I III II раздѣлены прямою III IV пополамъ. Совмѣщеніе чертежей 6 и 7 можно произвести еще



и такъ, чтобы совпали I съ I и II съ II; для этого одинъ изъ отпечатковъ придется предварительно повернуть на выпрямленный уголъ; въ результатѣ получится тождественная съ на-

чальной фигура d, которая показываетъ, что общая хорда окружностей раздѣлилась точкою O пополамъ.

Вмѣсто того, чтобы получать съ оригинала отпечатки 6 и 7 каждый въ отдѣльности, постараемся получить ихъ на одномъ и томъ же мѣстѣ, на общемъ радіусѣ, но для полученія 2-го отпечатка повернемъ оригиналъ на выпрямленный уголъ. Получится фигура 10. (Въ кружкахъ поставлены названія точекъ второго отпечатка; иначе они сольются съ названіями точекъ перваго). Если теперь допустить, что прямыя I III и II III въ оригиналѣ пересѣклись гдѣ-нибудь, напр., справа вверху, то въ совмѣщенныхъ отпечаткахъ на фиг. 10 эти линіи пересѣкутся дважды: слѣва вверху и справа внизу, но двѣ различныя прямыя не могутъ имѣть двухъ общихъ точекъ, слѣд., въ оригиналѣ прямыя I III и II III должны быть параллельными.



Изъ всего сказаннаго можно видѣть, что одинъ лишь черт. 5 далъ много матеріала для геометрическихъ выводовъ, вовсе не требуя для нихъ обычныхъ теоремъ о равенствѣ треугольниковъ. Мало того, фигуры являются исполненными, т. е. уже построенными, а не какими-то лишь возможными, исполненіе которыхъ отодвигается на дальніе параграфы учебника. И мое всегдашнее искреннее убѣжденіе, что въ элементарномъ

курсѣ геометріи мы должны изучать фигуры построенныя, а не подносить учащимся теоремы о фигурахъ, я скажу, лишь воображаемыхъ. Въ дѣлѣ новомъ воображать можно и должно лишь то, что исполнимо. Отвлеченныя же строго-логическія построенія могутъ стать достояніемъ лишь того ума, который пріобрѣлъ способность не только отчетливо воспринимать реальные образы, но и создавать ихъ, т. е., иными словами, имѣть въ своемъ распоряженіи развитое воображеніе.

Для дѣленія угла пополамъ я возьму построеніе съ двумя концентрическими окружностями (черт. 11). Обычное доказательство правильности его потребуетъ трехъ паръ равныхъ треугольниковъ, совмѣщеніе же отпечатковъ, которыхъ я для сокращенія мѣста дѣлать не стану, ни въ чемъ подобномъ не нуждается; оно до очевидности просто. Болѣе обычный способъ дѣленія угла пополамъ требуетъ проведенія трехъ окружностей, но доказательство посредствомъ совмѣщенія отпечатковъ не становится отъ этого труднѣе.

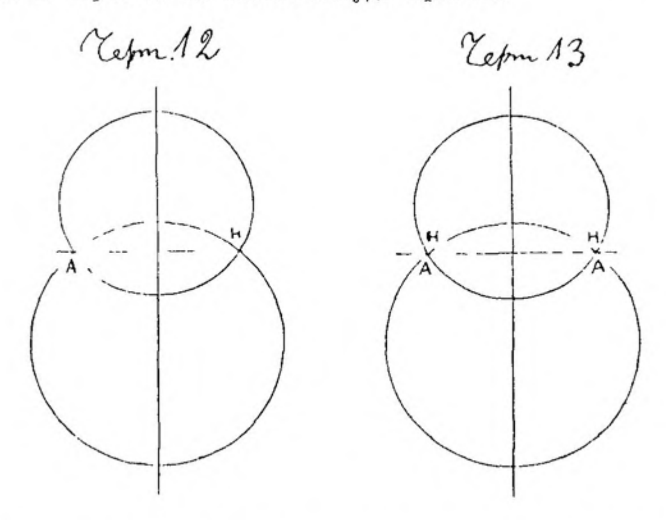
Построеніе угла и проведеніе перпендикуляра требуютъ предварительнаго знакомства съ пересѣченіемъ различныхъ окружностей. Поэтому необходимо заранѣе изучать соотвѣтствующія фигуры.

Если оригиналомъ взять фиг. 12, то два отпечатка съ нея, совмѣщенные одинъ съ другимъ такъ, чтобы совпали центры равныхъ окружностей, дадутъ фиг. 13; въ ней ясно обнаружится перпендикулярность общей хорды AH къ линіи центровъ. Слѣдовательно, для проведенія перпендикуляра изъ точки на прямую, достаточно отмѣтить на этой прямой двѣ какія-нибудь точки и принять ихъ за центры окружностей, проходящихъ черезъ данную точку. Обѣ точки пересѣченія окружностей опредѣлятъ положеніе искомаго перпендикуляра.

Слѣдуетъ замѣтить, что вообще всякое построеніе, въ которомъ можно найти ось симметріи, позволяетъ тотчасъ-же примѣнить къ нему принципъ совмѣстимости и обнаружить то или иное свойство фигуры. Поэтому и болѣе обычный способъ проведенія перпендикуляра изъ точки на прямую, какъ основанный тоже на симметріи, безъ труда оправдывается примѣненіемъ изложенныхъ пріемовъ.

Легко видѣть, что отпечатки съ оригинала представляютъ собою какъ-бы оборотную сторону плоскости, на которой помѣщенъ оригиналъ. Поэтому для краткости рѣчи теперь можно согласиться на выраженіе: совмѣстимъ чертежъ съ самимъ собою, повернувъ его для этого другой стороной его плоскости: надо только при этомъ указывать, какія точки остаются на мѣстѣ.

Далѣе можно еще согласиться и на другое выраженіе, которымъ иногда неосмотрительно пользуются, именно: перегнемъ плоскость чертежа по какой-нибудь прямой.



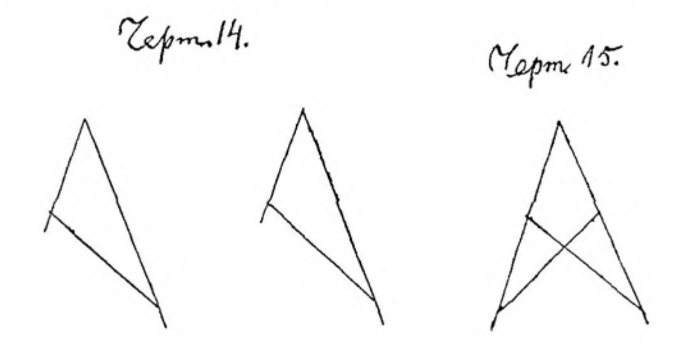
Если ABC -- данный треугольникъ, то новый треугольникъ съ тѣми же тремя сторонами надо строить такъ. На какой-нибудь прямой откладываемъ послѣдовательно три его стороны AB, BC, CA; концы средней стороны BC принимаемъ за центры окружностей, крайнія стороны—за соотвѣтствующіе радіусы. Можно ожидать полученія трехъ различныхъ треугольниковъ, смотря по тому, какая изъ трехъ сторонъ помѣстится въ срединѣ. Однако, этого не случится, если признать за очевидное, что отпечатки двухъ какихъ-либо пересѣкающихся окружностей всегда могутъ быть совмѣщены одинъ съ другимъ; дѣйствительно, стоитъ лишь въ данномъ треугольникѣ провести соотвѣтствующія окружности, чтобы доказать, что каждый изъ

новыхъ построенныхъ треугольниковъ можетъ быть совмѣщенъ съ даннымъ. Тѣмъ самымъ будетъ, конечно, доказанъ случай равенства треугольника по 3 сторонамъ.

Построеніе угла, равнаго данному, есть слѣдствіе предыдущаго построенія.

Умѣя строить данный уголъ, можно перейти къ доказательству равенства треугольниковъ по двумъ сторонамъ и углу между ними.

Если мы возьмемъ два треугольника (черт. 15), начерченные на двухъ различныхъ плоскостяхъ, то совмѣщеніе плоскостей еще не приведетъ къ совмѣщенію фигуръ; получится фигура черт. 15. Поэтому нужно съ каждаго треугольника



получить по отпечатку, но не два отдѣльныхъ, а одинъ на другомъ, начавъ совмѣщенія ихъ съ равныхъ угловъ; въ результатѣ—полное совмѣщеніе треугольниковъ.

Такое посредственное совмѣщеніе данныхъ фигуръ требуетъ видоизмѣненія обычнаго опредѣленія равенства геометрическихъ фигуръ.

Мы будемъ называть геометрически равными тѣ фигуры, которыя могутъ быть совмѣщены одна съ другою или каждая поочередно съ третьей. Это опредѣленіе пригодно и полезно не только въ планиметріи, но съ еще большимъ правомъ можетъ быть использовано въ стереометріи. Можно еще добавить къ этому, что всякія двѣ фигуры, исполненіе которыхъ тождественно, должны быть равны

между собою, и равенство это никакого доказательства не требуетъ.

Почему-то принято для отложенія равныхъ отрѣзковъ и равныхъ угловъ прибѣгать непремѣнно къ циркулю. А что, если я, требуя построенія угла, равнаго данному, не позволю на этомъ послѣднемъ ни чертить какія-либо окружности, ни колоть его остріями циркуля? Для рѣшенія задачи я прибѣгаю въ этомъ случаѣ къ транспортиру, но не какъ къ измѣрительному инструменту, а просто, какъ къ вспомогательной переносной плоскости; и мнѣ совершенно нѣтъ дѣла до того, вѣрно-ли у взятаго транспортира поставленъ центръ и правильны-ли дѣленія. Я пользуюсь послѣдними лишь въ качествѣ мѣтокъ, и даже въ случаѣ необходимости самъ поставлю на транспортирѣ свою мѣтку. За неимѣніемъ транспортира я могу взять произвольной формы кусокъ бумаги и при помощи его отложить данный уголъ, сдѣлавъ на краяхъ бумаги три необходимыя отмѣтки въ то время, когда она будетъ совмѣщена съ даннымъ угломъ.

Для отложенія прямолинейнаго отрѣзка можно употреблять либо масштабъ, либо бумагу, край которой прямолинеенъ.

Я считаю, что переносная плоскость (транспортиры!) есть необходимое пособіе при изученіи основныхъ случаевъ равенства плоскихъ фигуръ.

Говоря о равновеликихъ фигурахъ, безусловно необходимо упоминать о совмѣстимости ихъ при помощи разрѣзовъ, т. е., иначе, о равновеликости по суммѣ составляющихъ частей. Такъ, напр., очень интересенъ вопросъ о равновеликости двухъ треугольниковъ съ равными основаніями и высотами.

С. И. Шохоръ-Троцкій въ предисловіи къ своей книгѣ «Геометрія на задачахъ, вып. 2-ой, кн. для учащихся» упоминаетъ, между прочимъ, о моемъ способѣ рѣшенія этой задачи.

Я укажу еще на разнообразные случаи совмѣщенія квадрата на гипотенузѣ съ разрѣзанными на части квадратами на катетахъ.

Въ нашихъ учебникахъ говорится въ своемъ мѣстѣ о двугранныхъ углахъ и объ условіяхъ ихъ равенства. Ученики усвоятъ, точнѣе—выучатъ соотвѣтствующія теоремы, но они совершенно не сумѣютъ примѣнить ихъ къ дѣйствительности.

Попробуйте дать имъ для сравненія двугранныхъ угловъ два какіе-нибудь многогранники, деревянные, картонные или металлическіе, или еще проще, укажите на углы между стѣнами класса и предложите узнать, равны или не равны разсматриваемые двугранные углы, какой изъ нихъ больше и на сколько, сколько градусовъ въ каждомъ, и т. д.

Не сомнѣваюсь, что такими вопросами ученики будутъ поставлены въ большое затрудненіе.

Конечно, нѣкоторыми будутъ предложены различные пріемы, но безъ того или иного совмѣщенія данныхъ угловъ съ вспомогательными (изъ картона или иного матеріала) дѣло не обойдется. Это и укажетъ на необходимость указаннаго выше опредѣленія равенства фигуръ.

Будетъ еще лучше, если мы при помощи обрѣзанныхъ подъ прямымъ угломъ листочковъ бумаги или картона и приложенныхъ къ гранямъ получимъ линейный уголъ; на сторонахъ послѣдняго могутъ быть отложены линейные размѣры отъ вершины или даже отъ произвольно выбранной точки; разстоянія-же между точками на разныхъ плоскостяхъ могутъ быть при помощи циркуля перенесены на плоскость чертежа: составится треугольникъ и четыреугольникъ, углы котораго могутъ быть измѣрены.

Не слѣдуетъ уклоняться и отъ того случая, когда ребро двуграннаго угла притуплено или совершенно отсутствуетъ.

Статью объ измѣреніи двугранныхъ угловъ слѣдуетъ заканчивать указаніемъ на значеніе гоніометріи въ кристаллографіи.

На совмѣщеніи многогранниковъ я останавливаться не буду. Я сошлюсь въ этомъ случаѣ прежде всего на «Стереометрію» Н. А. Извольскаго (Геометрія въ пространствѣ. М. 1910). Если мы возьмемъ § 50 этой стереометріи, то въ немъ находимъ указаніе на невозможность совмѣщенія такъ называемыхъ симметричныхъ трегранныхъ угловъ. Да, цѣликомъ совмѣщеніе невозможно! Но трегранный уголъ не пирамида, и его всегда можно разрѣзать на части, изъ которыхъ будетъ сложенъ уголъ симметричный. Для этого слѣдуетъ поступить такъ, какъ разрѣзами и переложеніемъ получается изъ тре-

угольника на плоскости ему симметричный, т. е. взять центръ вписаннаго въ треугольникъ круга, провести въ точки касанія радіусы и по нимъ треугольникъ разрѣзать; можно воспользоваться и центромъ описаннаго круга, но лишь въ томъ случаѣ, когда онъ помѣщается внутри треугольника; центръ соединяемъ съ вершинами, и по этимъ линіямъ треугольникъ разрѣзаемъ.

Для перенесенія этихъ пріемовъ на трехгранный уголъ надобно вообразить сферу съ центромъ въ вершинѣ трегранпаго угла и продѣлать съ получившимся сферическимъ треугольникомъ то, что дѣлали съ плоскимъ. Сферическій треугольникъ, а вмѣстѣ съ нимъ и трегранный уголъ, должны быть послѣ этого разрѣзаны на три части; одна изъ частей останется на мѣстѣ, а остальныя взаимно обмѣняются своими положеніями, какъ если бы онѣ вращались около оси, проходящей черезъ центръ вспомогательнаго круга.

Въ заключеніе замѣчу, что принципомъ совмѣстимости не слѣдуетъ злоупотреблять, какъ не слѣдуетъ, конечно, злоупотреблять и мелочными доказательствами различныхъ свойствъ фигуръ; такъ или иначе полученныя основныя теоремы всегда должны быть на первомъ мѣстѣ; онѣ всегда останутся незыблемымъ фундаментомъ геометріи».

Тезисы.

1. Курсъ геометріи долженъ начинаться изученіемъ легко исполнимыхъ плоскихъ фигуръ, скомбинированныхъ изъ прямыхъ линій и окружностей.

2. Необходимо указать средства получать **отпечатки** данной плоской фигуры на другой плоскости: сводная бумага, калька, копировальный прессъ, литографія, позитивный фотографическій процессъ и т. п.

3. Съ отпечатковъ могутъ быть получены новые отпечатки, между прочимъ, совмѣщенные съ прежними, вполнѣ или отчасти.

4. Всѣ отпечатки считаются **равными** оригиналу и между собою, и само **опредѣленіе равенства фигуръ** можетъ явиться въ такой формѣ: равными фигурами называемъ

такія, которыя могутъ быть совмѣщены одна съ другою или поочередно съ третьей.

5. Предыдущее опредѣленіе распространяется и на пространственныя фигуры: рѣзная металлическая печать и ея сургучныя или мастичныя отпечатки, вафельница и вафли, штампы и штампованныя вещи, монеты, медали, литейныя модели и отливки по нимъ и т. д.

6. Всѣ основныя задачи на построеніе, дѣленіе отрѣзка прямой или угла пополамъ, проведеніе перпендикуляра и т. п. не нуждаются для своего доказательства въ теоремахъ о равенствѣ треугольниковъ; напротивъ, сами построенія даютъ обильный матеріалъ для геометрическихъ теоремъ.

XIV. Роль геодезическихъ упражненій при обученіи математикѣ.

Докладъ Д. М. Левитуса (Спб.).

«На всѣхъ, безъ исключенія, ступеняхъ обученія надо считаться съ требованіемъ наглядности. Въ младшихъ классахъ учитель математики можетъ использовать разнообразныя наглядныя пособія; но, по мѣрѣ умственнаго роста учениковъ, должны измѣнять свой характеръ и тѣ способы, посредствомъ которыхъ можетъ быть достигнута наглядность обученія. Средніе и старшіе классы нуждаются въ дополнительныхъ пріемахъ, дѣлающихъ обученіе нагляднымъ. И поскольку рѣчь идетъ о геометріи и тригонометріи, такимъ дополнительнымъ пріемомъ могутъ съ успѣхомъ служить геодезическія упражненія учащихся.

Чтобы не возникло недоразумѣній, считаю нужнымъ теперь-же указать, что я здѣсь имѣю въ виду не введеніе геодезіи въ программу средней школы, ни даже введеніе нѣкоторыхъ геодезическихъ вопросовъ въ курсы геометріи и тригонометріи. Я имѣю въ виду исключительно загородныя экскурсіи учениковъ, во время которыхъ учениками—подъ руководствомъ учителя—могутъ выполняться нѣкоторыя геодезическія работы.

Я не имѣю возможности въ краткомъ докладѣ перечислить всѣ такія упражненія; тѣмъ болѣе не могу и изложить ихъ въ методической послѣдовательности. Я могу лишь нѣсколькими примѣрами охарактеризовать эти работы.

Возможны работы безъ всякихъ инструментовъ, съ однимъ только шнуромъ, раздѣленнымъ узлами на сажени и десятыя ихъ доли. Къ такимъ работамъ я отношу: измѣреніе длины, возставленіе перпендикуляра, построеніе прямоугольника, угловъ въ 30°, 60°. Эти работы значительно облегчатся, если добавить дешевый приборъ—эккеръ, служащій для возставленія перпендикуляровъ. Тогда уже съ легкостью разрѣшается рядъ задачъ построенія на мѣстности. Этотъ типъ упражненій доступенъ и для младшаго возраста. Я рекомендую, но не ихъ я имѣю въ виду, работы съ болѣе сложными приборами—мензулой и теодолитомъ. При этомъ я предполагаю, что эти приборы снабжены всѣми нужными приспособленіями для установки и провѣрки ихъ, а также и дальномѣрными нитями. Въ школьныхъ коллекціяхъ и теперь встрѣчаются астролябіи съ діоптрами, но работа съ такимъ приборомъ даетъ слишкомъ мало матеріала для развитія пространственнаго воображенія учениковъ. Приборы, конечно, должны быть спеціально сконструированы для школы; ихъ можно изготовить сравнительно дешево, если не требовать значительной точности, которой ученики, все равно, не сумѣютъ использовать.

Теперь я назову нѣкоторыя отдѣльныя упражненія съ указаніемъ тѣхъ отдѣловъ математики, проработкѣ которыхъ они будутъ содѣйствовать.

1. Опредѣленіе разстоянія до рейки, раздѣленной на сотыя доли сажени, при помощи дальномѣрной трубы,—упражненіе, использующее свойства подобныхъ треугольниковъ.

2. Установка мензулы или теодолита по уровню,—упражненіе, чрезвычайно сильно развивающее учениковъ въ области пространственныхъ представленій,—въ частности — въ вопросахъ о взаимной перпендикулярности и параллельности линій и плоскостей въ пространствѣ.

3. Съемка открытаго участка мензулою полярнымъ способомъ.—Упражненія на гомотетію.

4. Провѣрка главнѣйшихъ условій правильности прибора,—положеніе оси вращенія трубы относительно горизонта и оси визированія относительно оси вращенія. Это упражненіе заставляетъ учениковъ сильно углубиться въ область пространственныхъ соотношеній линій и поверхностей.

Вычерчиваніе плана и измѣреніе по плану даетъ возможность практически встрѣтиться съ вопросомъ о свойствахъ подобныхъ фигуръ, съ пріемами вычисленія площадей: вообще-же—выдѣлить математику, какъ ученіе о косвенномъ измѣреніи.

Когда ученики ознакомились съ тригонометріей, геодезическія упражненія даютъ массу поводовъ проработать любую главу изъ математическихъ отдѣловъ тригонометріи. Тригонометрическое нивеллированіе и опредѣленіе высотъ неприступныхъ предметовъ даетъ для этого богатый матеріалъ. Ознакомленіе съ накладкою на планъ по координатамъ также будетъ не безполезнымъ.

Детальной разработкѣ вопроса о геодезическихъ экскурсіяхъ учащихся должны быть посвящены особыя работы.

Цѣлью моего доклада было лишь напомнить учителямъ математики объ этой отрасли прикладной математики и выдѣлить рядъ упражненій, имѣющихъ характеръ не только приложенія изученнаго къ практикѣ, но и заставляющихъ ученика видѣть въ пространствѣ неначерченныя линіи. Эта сторона дѣла мнѣ кажется чрезвычайно важною; ей отвѣчаютъ упражненія по установкѣ и провѣркѣ приборовъ.,

Въ заключеніе скажу, что мой опытъ въ дѣлѣ устройства геодезическихъ экскурсій внушаетъ мнѣ увѣренность въ чрезвычайной пользѣ ихъ какъ со спеціальной математической точки зрѣнія, такъ и съ общепедагогической. Эти упражненія развиваютъ глазомѣръ, даютъ большую работу воображенію; ставятъ на свое мѣсто экспериментъ и логически построенное разсужденіе. Они показываютъ ученику необходимость приближенныхъ вычисленій и научаютъ его въ этой приближенности видѣть закономѣрность, присущую математикѣ; они даютъ неисчерпаемый источникъ темъ для всякихъ вычислительныхъ работъ, избавляя учителя отъ необходимости вы-

искивать сомнительныя съ житейской точки зрѣнія пирамиды съ заданными ребрами и двугранными углами при основаніи. какъ матеріалъ для вычислительныхъ упражненій. Геодезическія упражненія оказываютъ существенную услугу послѣдующему курсу космографіи, требующему большого напряженія способности видѣть въ пространствѣ.

Наконецъ, эти упражненія развиваютъ иниціативу, чувство дисциплины, а по способу ихъ проведенія полезны для здоровья. Я хотѣлъ-бы, чтобы этимъ упражненіямъ было отведено должное мѣсто въ школѣ».

Пренія по докладамъ Е. С. Томашевича, Д. М. Левитуса, Ѳ. А. Эрна и К. Ѳ. Лебединцева.

П. А. Долгушинъ (Кіевъ). „Вмѣсто равенства трехгранныхъ угловъ лучше разсматривать равенство сферическихъ тр-ковъ, или выбрасывать эту статью, какъ предлагаютъ программы Кіевскаго и Варшавскаго математическихъ обществъ. О полученіи плоскости треніемъ говоритъ еще Гельмгольцъ. Приведенное Е. С. Томашевичемъ доказательство о равенствѣ вертикальныхъ угловъ находимъ у Гадамара. Лучше говорить о перпендикулярѣ къ прямой и свойствахъ его раньше, чѣмъ о равенствѣ тр-ковъ. Тогда первый случай параллельности прямыхъ—перпендикуляры къ одной прямой. Теорему о пересѣченіи двухъ окружностей можно доказать въ началѣ курса. Теорема о параллельности прямыхъ при равенствѣ внутреннихъ на крестъ лежащихъ угловъ проще доказывается съ помощью теоремы о внѣшнемъ углѣ".

Е. С. Томашевичъ (Москва). ,,П. А. Долгушинъ указываетъ на то, что данный мною способъ доказательства равенства вертикальныхъ угловъ имѣется у Гадамара. Но я осуществляю это иначе, не прибѣгая къ совмѣщенію фигуръ другою стороною плоскости. Я, вообще, не желаю пользоваться другою стороною плоскости, считая плоскость принадлежностью твердаго неизмѣняемаго тѣла. Что касается расположенія матеріала въ курсѣ, то я не настаиваю на томъ именно, который предлагаю я. Мнѣ кажется только, что изученіе построенныхъ фигуръ должно стоять на первомъ планѣ. Между тѣмъ, при доказательствѣ построенія параллелей на основаніи теоремы о внѣшнемъ углѣ требуется знаніе теоремъ о равенствѣ треугольниковъ. Я же въ равенствѣ

треугольниковъ не нуждаюсь. Въ заключеніе скажу, что помимо учебнаго матеріала и его расположенія есть еще личность учителя, что въ ней, можетъ-быть,—вся суть".

П. П. Поповъ (Москва) проситъ Д. М. Левитуса объяснить, для чего необходимы точные инструменты при исполненіи учениками практическихъ геодезическихъ работъ.

Д. М. Левитусъ (Спб.) стоитъ за точные геодезическіе инструменты, такъ какъ они снабжены приспособленіями для установки горизонтальной плоскости, и вообще обогащаютъ воображеніе учащихся пространственными представленіями.

К. И. Зрене (Спб.). „Въ заслушанномъ докладѣ Д. М. Левитуса указывается, что для ознакомленія учениковъ съ геодезическими упражненіями, при прохожденіи курса тригонометріи, необходимо употреблять точные инструменты, какъ, напримѣръ, теодолитъ и т. п. Принимая во вниманіе трудность установки точныхъ инструментовъ геодезическихъ не только для взрослыхъ, (какъ, напр., студентовъ высшихъ спеціальныхъ учебныхъ заведеній), но даже для инженеровъ, я думаю, что вполнѣ достаточно пріучать учениковъ пользоваться астролябіей упрощеннаго типа, которая имъ наглядно покажетъ возможность примѣнять свои знанія. Инструменты же точные, какъ, напр.. теодолитъ, слишкомъ дороги и, къ тому же, требуютъ тщательнаго за ними ухода. Такъ какъ, для достиженія намѣченной докладчикомъ цѣли, ихъ надо имѣть для каждаго учебнаго заведенія въ нѣсколькихъ экземплярахъ, то предложеніе докладчика не соотвѣтствуетъ матеріальнымъ средствамъ, имѣющимся въ распоряженіи среднихъ учебныхъ заведеній".

Д. М. Левитусъ (Спб) находитъ, что вообще къ развитію пространственныхъ представленій учащихся надо особенно стремиться въ средней школѣ и что, поэтому, употребленіе точныхъ приборовъ для геодезическихъ упряжненій крайне желательно. Тѣмъ болѣе. что зачастую учащіеся средней школы, какъ въ томъ убѣждаетъ опытъ докладчика, справляются съ точными инструментами не хуже иныхъ студентовъ.

А. Н. Шапошниковъ (Москва) отмѣчаетъ отличныя качества доклада Θ. А. Эрна. Г. Эрнъ требуетъ, чтобы мода играла какъ можно меньшую роль и чтобы возможно большую роль отвести здравой критикѣ. А. Н. Шапошниковъ вполнѣ присоединяется къ пожеланіямъ докладчика.

П. А. Извольскій (Москва). „Въ докладѣ К. Θ. Лебединцева было упомянуто о неточностяхъ и нестрогостяхъ въ курсахъ математики. Напр.: «Допускаютъ неточныя, отчасти даже невѣрныя объясненія, лишь бы они были понятны учащимся»... Здѣсь сом-

нѣнія двоякаго рода: 1) рекомендуемый докладчикомъ конкретно-индуктивный методъ также *можно* назвать, пожалуй, неточнымъ (примѣръ, $2^{2^n}+1$); 2) разъ объясненія даны, и вопросъ сдѣлался учащимся ясенъ, то объ этихъ объясненіяхъ нельзя говорить, что они «не точны, отчасти невѣрны», или что они «безусловно точны». Они цѣлесообразны, и ничего иного о нихъ сказать нельзя. Терминъ «неточныя» объясненія требуетъ поясненій».

К. Ѳ. Лебединцевъ (Москва). „Мы расходимся съ Н. А. Извольскимъ по существенному вопросу. Въ своемъ докладѣ я высказывался противъ употребленія заведомо неточныхъ и невѣрныхъ объясненій. Въ качествѣ примѣра могу сослаться на упомянутую мною «Дидактику математики» Al. Höfler'a. При изложеніи ученія о десятичныхъ дробяхъ, Гёфлеръ сознательно допускаетъ логическій дефектъ, указывая, что одиннадцатилѣтнія дѣти не настолько проницательны, чтобы его подмѣтить. Вотъ противъ такой постановки дѣла я и возставалъ въ своемъ докладѣ, считая такой пріемъ совершенно не педагогичнымъ. Далѣе Н. А. Извольскій указалъ, что онъ считаетъ недопустимымъ только одинъ *видъ* неточности,—это отсутствіе постоянства въ терминологіи. Я сказалъ бы *наоборотъ*, что это требованіе можетъ быть и не соблюдаемо, да фактически и не соблюдается. Мы употребляемъ слово «квадратъ» для обозначенія какъ геометрическихъ фигуръ, такъ и второй степени числа. Важно только, чтобы мы каждый разъ отдавали себѣ отчетъ въ смыслѣ употребляемаго термина".

XV. Вопросъ объ измѣреніяхъ и мѣрахъ въ системѣ ариѳметики.

Докладъ Л. А. Сельскаго (Варшава).

Докладъ этотъ напечатанъ въ вышедшемъ отдѣльнымъ изданіемъ сборникѣ: «Л. Сельскій. Нѣкоторыя графики, примѣняемыя къ изложенію начальной ариѳметики... и пр.» Варшава. Типографія Варшавскаго учебнаго округа. 1913 г. Ц. 30 к., а потому здѣсь не приводится. Заключительныя-же предложенія докладчика состояли и въ слѣдующемъ:

«*А*) Необходимо установить въ системѣ учебной ариѳметики опредѣленную и научную точку зрѣнія на сущность конкретныхъ измѣреній и мѣръ.

Б) Необходимо отграничить въ курсѣ ариометики представленіе о мѣрахъ и измѣреніяхъ отъ пріемовъ лавочнаго и другихъ видовъ счета.

В) Необходимо преобразовать нынѣ существующую въ главѣ объ измѣреніяхъ и мѣрахъ терминологію, введя понятіе о составныхъ единицахъ или высшихъ и низшихъ разрядахъ мѣрныхъ чиселъ, вмѣсто существующихъ нынѣ «мѣръ высшаго» и «мѣръ низшаго наименованія»; съ другой стороны, понятія раздробленія и превращенія необходимо распространитъ съ разрядовъ мѣрныхъ чиселъ также и на разряды чиселъ отвлеченныхъ.

Г) Необходимо высказать сужденіе объ образовательномъ значеніи вопроса о сущности конкретныхъ измѣреній и мѣръ, какъ основного пріема къ точному понятію количественно представляемыхъ свойствъ вещей».

4-я и 5-я секціи.

Преподаваніе математики въ техническихъ и коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ.

ЗАСѢДАНІЕ

29 декабря 1911 года.

Предсѣдатель: М. Л. Франкъ (Спб.).
Секретарь: Е. И. Полушкинъ (Спб.).

Курсъ анализа въ среднихъ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ.

Докладъ М. Л. Франка (Спб.)

«Въ виду того, что въ секретаріатъ не поступило ни одного заявленія о докладахъ въ технической секціи, кромѣ моего, но съ другой стороны весьма многіе члены съѣзда выражали желаніе подѣлиться мыслями о преподаваніи математики въ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ, я полагаю, что цѣлесообразнѣе всего и мнѣ сократить по возможности свой докладъ и, высказавъ основныя положенія его, предложить собравшимся здѣсь обмѣняться мнѣніями по вопросу о постановкѣ преподаванія математики для техниковъ.

Цѣль преподаванія математики въ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ нѣсколько иная, чѣмъ въ общеобразовательной школѣ. Само собою разумѣется, что развивающее, общеобразовательное значеніе математики не должно быть отодвигаемо въ техническихъ училищахъ на задній планъ. Эта сторона обученія у насъ общая со всякой средней школой и, очевидно, какъ и вездѣ, требуетъ серіозной реформы. Мы должны, однако же, подходить къ преподаванію еще съ другой стороны, мы не можемъ и не должны забывать значенія математики, какъ могущественнаго орудія въ рукахъ техника.

Объединеніе въ программѣ и методахъ этихъ двухъ одинаково важныхъ для насъ сторонъ преподаванія математики

является чрезвычайно трудной проблемой, стоящей передъ нами и требующей своего разрѣшенія.

Что мы видимъ сейчасъ? Въ настоящее время въ методикѣ преподаванія технической математики замѣчается два, рѣзко противоположныхъ направленія. Одно направленіе, въ основѣ своей, имѣетъ положеніе, что математика, какъ наука, едина, что не можетъ быть особенной математики для техниковъ, а потому курсъ математики въ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ не долженъ ничѣмъ отличаться отъ курса общеобразовательной школы. Этому направленію отвѣчаетъ большинство современныхъ программъ. Правда, нѣкоторые отдѣлы математики считаются для техниковъ излишними и иной разъ выпускаются, но на ихъ мѣсто не приходитъ ничего особеннаго. Въ результатѣ, даже хорошій педагогъ, если онъ и сумѣетъ привить интересъ къ самой математикѣ, при подобной постановкѣ своего преподаванія, не можетъ установить внутренней связи своего предмета съ остальными техническими предметами и въ концѣ концовъ математика окажется совершенно изолированной.

Реакціей противъ такого теоретическаго направленія преподаванія явилось рѣзко противоположное практическое направленіе, исходящее изъ практическихъ странъ—Англіи и Америки. Въ основѣ этого направленія лежитъ положеніе, что технику надо привить рядъ «умѣній» пользоваться готовыми математическими формулами и схемами, совершенно не вдаваясь въ сущность математическаго предмета. И дѣйствительно, защитники практической системы выдвигаютъ цѣлый рядъ солидныхъ доводовъ. Не касаясь подробно этихъ доводовъ, укажу только на самый яркій и убѣдительный. Ни для кого не секретъ, что значительная часть инженеровъ съ высшимъ образованіемъ, практически работающихъ въ техническихъ предпріятіяхъ, совершенно забываютъ весь курсъ высшей математики, даже и значительную часть элементарной. Это не мѣшаетъ имъ быть прекрасными инженерами и умѣло пользоваться всѣми справочниками. Очевидно, какъ будто бы, математика технику очень мало нужна.

Этотъ наиболѣе яркій доводъ, однако же, по моему мнѣ-

нію, можетъ служить свидѣтельствомъ только того, что методъ преподаванія математики въ высшихъ спеціальныхъ учебныхъ заведеніяхъ почти совсѣмъ не приспособленъ къ спеціальнымъ требованіямъ инженеровъ: инженеръ забываетъ ненужное ему и съ большими усиліями въ самой практической жизни принужденъ *учиться нужному*. При этомъ онъ, конечно, страдаетъ отъ недостатка математическаго образованія, но ясно сознаетъ, что ему мало помогла бы академически строгая математика.

Съ другой стороны, изученіе одной только «практической математики», которое сводится къ умѣнью пользоваться готовыми формулами и таблицами, конечно, не можетъ быть признано удовлетворительнымъ. Помимо того, что такого рода изученіе, конечно, не заключаетъ въ себѣ развивающихъ элементовъ, оно отрѣзываетъ совершенно возможность критическаго отношенія къ математическому матеріалу, которымъ приходится пользоваться, и въ результатѣ можетъ привести къ крупнѣйшимъ ошибкамъ. Случайная замѣна одного символа другимъ, одного буквеннаго обозначенія какимъ-либо новымъ, является непреодолимымъ препятствіемъ для ума, привыкшаго механически производить дѣйствія. О самостоятельной творческой работѣ воспитаннаго на «практической математикѣ» ума не можетъ быть и рѣчи.

Компромиссъ между двумя этими крайними направленіями оказывается мало осуществимымъ. Если уменьшить объемъ изученія теоріи, оставивъ время на изученіе пріемовъ практической математики, то количество теоретическихъ познаній окажется недостаточнымъ для выясненія болѣе или менѣе сложныхъ проблемъ техники, а самыя познанія будутъ недостаточно углублены. Получается почти безцѣльная затрата времени на изученіе теоріи, что̀ обыкновенно и утверждаютъ сторонники практическихъ методовъ.

Выходъ изъ положенія можетъ быть найденъ, по моему мнѣнію, лишь при полномъ пересмотрѣ какъ матеріала, такъ и методовъ преподаванія, которые должны быть сообразованы одновременно съ цѣлью преподаванія и требованіями раціональной педагогики.

Цѣлью преподаванія математики является достиженіе

умѣнія сознательно рѣшать задачи техническаго характера. Для техника нѣтъ, конечно, необходимости производить точный анализъ стоящей передъ нимъ проблемы. Ему не нужно даже ея точнаго рѣшенія. Онъ нуждается только въ ясномъ пониманіи смысла задачи и въ приближенномъ ея рѣшеніи. Для рѣшенія онъ долженъ умѣть найти кратчайшій путь, дающій при томъ достаточную точность результата.

При изученіи высшей математики необходимо прежде всего достигнуть яснаго пониманія методовъ высшаго анализа, что можетъ быть осуществлено преимущественно на задачахъ конкретно-техническаго характера. Ограничивъ программу преподаванія анализа выводомъ только простѣйшихъ формулъ и теоремъ, необходимо развить у учащагося функціональное мышленіе и умѣніе пользоваться наглядными графическими методами интерпретаціи аналитическихъ задачъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ необходимо изученіе въ сравнительно большемъ объемѣ методовъ приближеннаго и графическаго исчисленія въ примѣненіи его къ задачамъ сравнительно сложнымъ. Разъ смыслъ методовъ высшаго анализа ясенъ, то пользованіе приближенными методами, при условіи критическаго къ нимъ отношенія, одновременно принесетъ пользу какъ для общаго развитія учащагося, такъ и для вооруженія его практическими средствами разрѣшенія сложныхъ задачъ. Пользованіе логариѳмической линейкой и логариѳмической бумагой, миллиметровой калькой, планиметрами и другими средствами приближеннаго исчисленія даетъ возможность рѣшать сложныя задачи весьма простыми средствами.

Особенно желательнымъ является, чтобы всѣ отдѣлы математики, проходимые въ училищѣ, были по возможности слиты воедино, чтобы не было даже спеціальнаго отдѣльнаго курса высшей математики. Графическое изображеніе функцій можетъ быть введено въ самомъ началѣ изученія алгебры и если тамъ же обращать вниманіе на понятіе возрастанія и убыванія функцій, maximum и minimum, то основныя положенія дифференціальнаго исчисленія явятся естественнымъ слѣдствіемъ изъ всего уже извѣстнаго матеріала. Аналогично въ геометріи

при опредѣленіи площадей, поверхностей и объемовъ можно подойти сколь угодно близко къ понятію опредѣленнаго интеграла. При такомъ способѣ преподаванія высшая математика не окажется чѣмъ-то особенно страшнымъ и не потребуетъ для своего прохожденія большого числа часовъ и большого труда.

Естественно, что разработать въ деталяхъ проектъ такой реформы преподаванія математики въ техническихъ училищахъ чрезвычайно трудно и было бы крайне желательно, если бы работа эта была произведена коллективно цѣлой группой опытныхъ уже преподавателей.

Пренія по докладу М. Л. Франка.

А. Н. Роговскій (Спб.). „Высшая математика въ средней школѣ не должна быть проходима, не смотря на ея развивающее значеніе вслѣдствіе недостатка времени, большая часть котораго поневолѣ должна быть удѣляема на изученіе спеціальныхъ предметовъ. Я *полагаю, что для средняго техника прохожденіе высшей математики* въ школѣ не является необходимымъ съ практической точки зрѣнія. Если многимъ инженерамъ не приходится примѣнять на практикѣ высшей математики, то и подавно ее не будетъ примѣнять средній техникъ.

Нынѣшній курсъ математики въ средней технической школѣ, представляющій собой урѣзанный курсъ общеобразовательныхъ учебныхъ заведеній, неудовлетворителенъ уже потому, что органически не связанъ съ спеціальными предметами. Мнѣ кажется, что курсъ необходимой математики выработался бы практически скорѣе всего, если бы математику преподавали въ техническихъ училищахъ инженеры".

В. Я. Гебель (Москва). „Для планомѣрности бесѣды необходимо прежде всего условиться, о какихъ среднихъ техническихъ училищахъ идетъ рѣчь. Безъ этого обсужденіе будетъ неопредѣленнымъ".

Н. А. Томилинъ (Спб.) присоединяется къ сдѣланному В. Я. Гебелемъ заявленію.

А. В. Панкинъ (Спб.) предлагаетъ не деталировать слишко а разбить всѣ техническія училища на двѣ группы: 1) готовяща монтеровъ, или низшихъ техниковъ и 2) готовящая среднихъ техниковъ, могущихъ въ иныхъ случаяхъ замѣщать и инженера.

Д. М. Левитусъ (Спб.), присоединяясь къ предложенію А. В. Панкина, предлагаетъ говорить сейчасъ только о среднихъ техническихъ училищахъ.

А. В. Панкинъ (Спб.). „Основою техническаго образованія служатъ физико-математическія науки, которымъ должно быть удѣляемо достаточное мѣсто. Цѣлью изученія математики является: 1) логическое развитіе, 2) развитіе индукцій (количественныхъ и пространственныхъ), 3) фактическое запоминаніе, 4) механическое воспроизведеніе (исчисленіе и черченіе).

Въ среднихъ общеобразовательныхъ учебныхъ заведеніяхъ главными являются двѣ первыя цѣли, въ техническихъ же—центръ тяжести переносится на послѣднія двѣ. Однако же, и техническое образованіе не можетъ отличаться отъ первыхъ двухъ цѣлей.

Если общеобразовательная школа можетъ создать два концентра при преподаваніи математики для цѣлей индуктивнаго развитія и логическаго, то техническая школа, преслѣдуя тѣ же двѣ цѣли, едва ли можетъ выполнить то же. Придется довольствоваться курсами смѣшаннаго характера вродѣ второго концентра Borel'я. О курсѣ на строго логическихъ основаніяхъ нельзя думать потому, что въ старшихъ классахъ все время поглощается спеціальными курсами и, кромѣ того, фактическія свѣдѣнія по разнымъ отдѣламъ математики нужны уже гораздо раньше".

П. И. Жанколя (Спб.) возражаетъ А. В. Панкину. Въ 7-классныхъ училищахъ нѣтъ никакихъ препятствій для установленія двухъ концентровъ, а въ 4-хъ классныхъ приходится имѣть дѣло съ окончившими городскую школу и слѣдовательно прошедшихъ первый концентръ. Разбиваніе математики на отдѣльные циклы можетъ представить затрудненіе вслѣдствіе необходимости переплетать различные отдѣлы математики, напримѣръ, алгебру и геометрію, высшую математику и алгебру и т. д.

П. Н. Кокушинъ (Саратовъ). „Преподаваніе анализа введено уже теперь въ курсъ реальныхъ училищъ. Тѣмъ болѣе необходимо было бы ввести его въ техническія училища, гдѣ цѣлый рядъ важнѣйшихъ вопросовъ механики и электротехники требуютъ знанія высшаго анализа, безъ котораго преподаватель принужденъ прибѣгать къ хитроумнымъ методамъ или заставлять принимать многое на вѣру безъ вывода. Мой опытъ факультативнаго преподаванія началъ анализа, какъ введенія въ механику показалъ, что учащіеся легко воспринимаютъ основные методы, а потому я считаю желательнымъ введеніе обязательнаго курса высшей математики въ среднія техническія училища".

В. Я. Гебель (Москва) говоритъ о ненормальномъ учебномъ планѣ въ техническихъ училищахъ. Аналитическая геометрія отне-

сена ко второму классу, а въ первомъ проходится механика, причемъ анализъ совершенно отсутствуетъ.

Онъ высказывается за необходимость реформы учебныхъ книжекъ и за введеніе элементовъ высшей математики и предлагаетъ собранію остановиться на обсужденіи двухъ вопросовъ:

1) Необходимо ли введеніе курса анализа.

2) О постановкѣ преподаванія механики въ среднихъ технич. училищахъ.

А. П. Роговскій (Спб.) высказывается противъ введенія курса высшей математики. Ему удавалось излагать механику безъ высшей математики и учебникъ его по деталямъ машинъ, изложенный безъ высшей математики, рекомендованъ Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія въ качествѣ пособія.

Д. М. Левитусъ (Спб.) указываетъ, что прохожденіе курса анализа строго научнаго врядъ ли осуществимо. Зато легко осуществимо прохожденіе курса пропедевтическаго, а польза, приносимая такого рода курсомъ на столько несомнѣнна, что введеніе его онъ считаетъ прямо необходимымъ. Личный опытъ убѣдилъ его въ полной возможности пройти такой курсъ съ весьма удовлетворительнымъ результатомъ.

М. Л. Франкъ (Спб.) утверждаетъ, что при изложеніи основъ высшаго анализа нѣтъ необходимости удѣлять много времени теоріи предѣловъ, понятіе о которой должно даваться еще въ алгебрѣ и геометріи. Точно также можно значительно сократить обычный курсъ аналитической геометріи, обративъ зато больше вниманія на графики различныхъ функцій.

Н. А. Томилинъ (Спб.). „Предложенная М. Л. Франкомъ въ его докладѣ полная переработка программъ и методовъ не можетъ быть осуществлена въ ближайшемъ будущемъ, а между тѣмъ, необходимо уже сейчасъ найти нѣкоторый выходъ изъ положенія. Необходимо видоизмѣнить преподаваніе аналитической геометріи, чтобы она была оторванной отъ другихъ наукъ и направить изученіе на изслѣдованіе различныхъ важнѣйшихъ законовъ физики и механики, что дастъ и общее развитіе, и вызоветъ интересъ со стороны учащихся. Точно также необходимо было бы видоизмѣнить курсъ механики съ введеніемъ элементовъ анализа.

Г. С. Виницкій (Ростовъ на Д.) указываетъ на трудность прохожденія механики при современномъ учебномъ планѣ и высказываетъ предположеніе о раздѣленіи курса механики на два концентра. Первый изъ нихъ могъ бы быть пройденъ до окончанія курса математики, второй же—послѣ прохожденія всей математики и началъ анализа.

В. Я. Гебель (Москва) подчеркиваетъ трудность реформъ учеб-

наго плана. Съ одной стороны ясна необходимость прохожденія анализа и аналитической геометріи раньше механики, съ другой же—очевидно, врядъ ли удастся пройти эти отдѣлы математики въ 1-омъ классѣ и отложить механику на второй.

Н. В. Панкинъ (Спб.) подчеркиваетъ необходимость найти возможность преподавать анализъ и притомъ раньше механики. По его мнѣнію выходъ этотъ только въ созданіи двухъ концентровъ по механикѣ.

Д. М. Левитусъ (Спб.) резюмируетъ пренія по вопросу о курсѣ анализа. Большинство, очевидно, высказывается за необходимость введенія такого курса и реформированія преподаванія механики. Онъ предлагаетъ еще обмѣняться мнѣніями по вопросу о приближенныхъ вычисленіяхъ.

В. М. Филиповъ (Спб.) указываетъ, что лица, окончившія среднія учебныя заведенія, совершенно не умѣютъсчитать правильно. Обученіе правильно вычислять съ неточными данными должно начинаться возможно раньше, чтобы пріобрѣсти достаточный навыкъ.

А. И. Роговскій (Спб.) считаетъ полезнымъ переучивать самыя элементы ариѳметики. Напр., необходимо пріучать множить сначала, а не съ конца и т. д.

Д. М. Левитусъ (Спб.) также подчеркиваетъ полное неумѣніе считать у лицъ, прошедшихъ среднюю школу. Необходимо въ техническихъ училищахъ ввести побольше упражненій на вычисленія; было бы полезно отвести отдѣльные часы на изученіе пріемовъ и техники вычисленій. Необходимо, чтобы учащіеся имѣли ясное представленіе объ относительной погрѣшности при вычисленіяхъ.

Н. А. Томилинъ (Спб.) указываетъ на связь между анализомъ и приближенными вычисленіями и высказывается за необходимость возможно раньше, съ младшихъ классовъ, начинать пріучать къ приближеннымъ вычисленіямъ.

А. В. Панкинъ (Спб.) обращаетъ вниманіе на недостатокъ руководствъ по приближенному вычисленію, что объясняется недостаткомъ интереса къ этому чрезвычайно важному отдѣлу математики.

М. Л. Франкъ (Спб.), подчеркивая значеніе прохожденія приближеннаго вычисленія какъ для общаго развитія, такъ и съ практической точки зрѣнія, предлагаетъ внести на разсмотрѣніе Организаціоннаго Комитета Съѣзда желательность резолюціи о необходимости введенія курса приближеннаго вычисленія для техническихъ училищъ.

Д. М. Левитусъ (Спб.) предлагаетъ принять и довести до свѣдѣнія Организаціоннаго комитета Съѣзда слѣдующую резолюцію:

«Обмѣнъ мнѣній въ секціи Техническихъ учебныхъ заведеній выяснилъ, что для среднихъ техническихъ училищъ необходимо переработать существующія программы и учебные планы по математикѣ и механикѣ въ такомъ направленіи, чтобы графическимъ методамъ было отведено должное мѣсто, чтобы явилась возможность въ той или иной формѣ ввести преподаваніе началъ анализа до прохожденія систематическаго курса механики, и чтобы включено было обученіе приближеннымъ и сокращеннымъ методамъ вычисленій».

Предложенная резолюція принимается собраніемъ.

ЗАСѢДАНІЕ

29 декабря 1911 года.

Предсѣдатель: проф. П. А. Некрасовъ (Спб.).
Товарищъ предсѣдателя: А. Ѳ. Гатлихъ (Москва).
Секретарь: В. И. Литвинскій (Екатеринославъ).

1. О необходимыхъ отдѣлахъ математики для экономическихъ наукъ.

Докладъ проф. П. А. Некрасова (Спб.)

Сущность доклада заключается въ слѣдующемъ: Экономическое образованіе въ Россіи должно быть обосновано на научныхъ достовѣрностяхъ, открываемыхъ съ помощью математики. Необходимы соотвѣтствующіе отдѣлы математики въ среднемъ образованіи. Но математика въ ея элементарныхъ высшихъ основаніяхъ такъ разрослась, что въ планѣ преподаванія средней школы имъ не находится мѣста. Отсюда нѣтъ иного выхода, кромѣ соотвѣтствующаго подраздѣленія на типы.

Реальныя гимназіи (т. е. реальныя, техническія и коммерческія училища) можно подраздѣлить на слѣдующія двѣ группы: А) училища, подготовляющія къ механико-техническимъ спеціальностямъ, В) училища, подготовляющія къ экономическимъ (торгово-промышленнымъ и сельско-хозяйственнымъ спеціальностямъ) и къ химико-техническимъ наукамъ.

Эти двѣ категоріи училищъ нуждаются въ различныхъ группахъ элементовъ высшей математики. Тогда какъ училища (А) нуждаются въ помощи аналитической геометріи и математическаго анализа, другая группа училищъ (В) въ этихъ предметахъ вовсе не нуждаются, но очень нуждаются въ помощи другой группы математическихъ высшихъ элементовъ, примыкающихъ къ теоріи сочетаній, теоріи чиселъ и къ теоріи безусловныхъ и условныхъ достовѣрностей, т. е. вѣроятностей.

Примирить это противорѣчіе можно лишь различіемъ учебнаго плана математики въ старшихъ классахъ училищъ типа А и типа В, при общности учебнаго плана въ первыхъ четырехъ или пяти классахъ и при равноправіи этихъ типовъ въ отношеніи высшаго образованія.

Чтобы экономическое среднее и высшее образованіе въ Россіи поставить на строго научную почву, необходимо включить въ среднюю школу, въ ея типъ В, преподаваніе слѣдующихъ отдѣловъ математики:

I) Математическую теорію вѣроятностей, съ законами большихъ чисель и съ теоріей взаимоотношеній (въ смыслѣ Гальтона, Пирсона, Карла Ранке и пр., см. книгу П. А. Некрасова. Теорія вѣроятностей ч. III). II) Математическую статистику въ духѣ H. Laurent и П. А. Некрасова.

Лоранъ излагаетъ математическую статистику, какъ *экспериментальную часть раціональной политической экономіи.*

III) Графическое исчисленіе, наглядно представляющее при помощи сличительныхъ таблицъ, чертежей и картограмъ ариѳметическія функціи и числовыя закономѣрности различныхъ текущихъ экономическихъ явленій. Изъ этихъ матеріаловъ берется лишь элементарное, вполнѣ понятное возрасту.

Аналитическая же геометрія и высшій математическій анализъ (дифференціальное и интегральное исчисленіе) могли бы быть въ планѣ училищъ (В) исключены, если не хватитъ времени, кромѣ понятія о координатахъ и кромѣ ученія о maximum-minimum простѣйшихъ функцій, встрѣчающихся въ задачахъ по статистикѣ, кредиту и экономіи.

Сокращенію должны подлежать и многія пустопорожнія задачи ариѳметики, алгебры и геометріи. Напротивъ, задачи, сближенныя съ запросами жизни, должны быть привѣтствованы, если они согласны съ наукою.

Экономическая независимость Россіи тѣсно связана съ научно-правильной постановкой реальной средней школы, не только типа А, но типа В. Предлагаемая реформа основного плана поэтому принадлежитъ къ числу неотложныхъ.

Пренія по докладу проф. П. А. Некрасова.

З. А. Архимовичъ (Кіевъ). „Постановка преподаванія математики въ коммерческихъ училищахъ въ данное время не ниже постановки отдѣловъ математики въ реальныхъ училищахъ и потому нѣтъ необходимости отказываться отъ введенія началъ аналитической геометріи и началъ анализа, конечно, лишь останавливаясь на существенно необходимыхъ отдѣлахъ этихъ дисциплинъ. Въ общемъ, присоединяясь къ положеніямъ доклада уважаемаго профессора, при семъ считаю существенно важнымъ дать ученикамъ необходимую математическую подготовку къ усвоенію началъ теоріи вѣроятностей, столь широко примѣняемой въ экономическихъ наукахъ. Все это наводитъ на мысль о необходимости особой разработки програмъ по математикѣ, чтобы, вводя новое, исключить излишнее и тѣмъ облегчить трудъ учащихся".

В. Г. Морачевскій (Кривой Рогъ, Херс. губ.). „Считая предложенія докладчика отвѣчающими насущной потребности обоснованія экономическихъ наукъ, высказываю пожеланіе о перенесеніи нѣкоторыхъ отдѣловъ изъ коммерческой ариѳметики въ общую и о введеніи на освобождающееся отъ этого время отдѣловъ теоріи вѣроятностей и нѣкоторыхъ ея примѣненій".

II. О постановкѣ преподаванія математики въ коммерческихъ училищахъ.

Тезисы доклада И. Л. Бакуменко (Мелитополь, Тавр. губ.).

1) Въ виду наличности въ программѣ коммерческихъ училищъ коммерческой ариѳметики является возможнымъ изъ курса общей ариѳметики выбросить задачи на спеціальныя правила, оставивъ только основную задачу на проценты, которая должна найти мѣсто еще въ курсѣ десятичныхъ дробей, а также пропорціональное дѣленіе.

2) Задачи на пропорціональныя величины должны быть сохранены.

3) Введеніе въ курсъ коммерческихъ училищъ съ преподаваніемъ коммерческихъ наукъ исключительно въ старшихъ классахъ, какъ преимущественно общеобразовательныхъ, теоріи вѣроятностей съ приложеніями ея къ обоснованію экономиче-

скихъ наукъ, въ виду недостаточности времени — не желательно.

4) Въ общемъ курсѣ ариѳметики слѣдуетъ сохранитъ общепринятый порядокъ прохожденія дробей.

5) Отдѣлы о дѣлимости чиселъ и теорія періодическихъ дробей должны быть отнесены въ курсъ ариѳметики VII-го класса.

6) Курсъ алгебры слѣдуетъ сохранить въ полномъ объемѣ, причемъ прохожденіе алгебры должно начинаться не съ рѣшенія уравненій, а съ изученія алгебраическихъ выраженій и ихъ преобразованій.

7) Курсъ геометріи долженъ быть пересмотренъ въ смыслѣ опущенія доказательствъ тѣхъ положеній, которыя очевидны, и вообще въ смыслѣ предложеній Д. В. Ройтмана.

8) Въ геометрическомъ черченіи наряду съ рѣшеніемъ задачъ съ анализомъ слѣдуетъ дать мѣсто и рѣшенію задачъ интуитивнымъ путемъ.

9) Каждая математическая дисциплина въ средней школѣ должна являться не какъ наука сама по себѣ, а какъ учебный предметъ, имѣющій въ виду дать учащимся надежные и точные методы математическаго изслѣдованія.

10) Методы нагляднаго обученія, а въ томъ числѣ и лабораторный методъ и введеніе въ изученіе пространственныхъ образовъ движенія, должны найти себѣ мѣсто при прохожденіи математики въ средней школѣ, быть можетъ въ большей мѣрѣ, чѣмъ это имѣетъ мѣсто до сихъ поръ.

11) Индивидуализація преподаванія въ формѣ выдѣленія двухъ отдѣловъ въ старшемъ классѣ — отдѣловъ механико-техническаго и коммерческаго — недостаточна: даже выдѣленіе трехъ отдѣловъ. классическо-гуманитарнаго, реальнаго и коммерческаго дало бы только возможность проявиться индивидуальности учащихся при выборѣ высшей школы.

Пренія по докладу И. А. Бакуменко.

Проф. *П. А. Некрасовъ* (Спб.) указываетъ на разность точекъ зрѣнія докладчика. Увлеченіе аналитическимъ изслѣдованіемъ

исключаетъ способность разбираться въ вопросахъ, нужныхъ торговому дѣлу. Необходимо выработать страховое ариѳметическое и комбинаторное мышленіе, столь необходимое для коммерческихъ людей. Знакомство профессора съ таблицами среднихъ школъ всѣхъ странъ Европы убѣждаетъ его въ правильности проводимаго имъ взгляда. Даже и Франція пришла къ разочарованію въ своей прежней бифуркаціи. Французская бифуркація спеціальныхъ классовъ (классъ словесный и классъ математическій) замѣнена, по декрету 1902 года, четырьмя спеціальными классами: 1) словесный съ древними языками, 2) словесный съ новыми иностранными языками, 3) математическій съ господствомъ анализа и 4) математическій съ господствомъ ариѳметики и теоріи описательной статистики. Интересы индивидуализаціи требуютъ того же самаго.

С. В. Новосильцевъ (Екатеринодаръ). „Введеніе теоріи вѣроятностей и теоріи соединеній, по моему мнѣнію, абсолютно необходимо. Будущему коммерсанту, понимая это слово въ широкомъ смыслѣ, необходимо быть знакомымъ съ такими дисциплинами, какъ теорія страхованія и теорія долгосрочныхъ финансовыхъ операцій, а изложеніе этихъ отдѣловъ невозможно безъ элементарныхъ свѣдѣній изъ теоріи вѣроятностей и теоріи соединеній. Я на практикѣ проводилъ высказанную мысль. Въ Ростовскомъ коммерческомъ училищѣ, гдѣ я раньше преподавалъ, былъ отведенъ одинъ урокъ для, такъ называемой, политической ариѳметики, куда и входятъ вышеуказанные отдѣлы математики. Замѣчу, что ученики относились къ политической ариѳметикѣ, пожалуй, даже съ большимъ интересомъ, чѣмъ къ остальнымъ отдѣламъ математики и коммерческихъ наукъ".

В. В. Мурашевъ (Нижній Новгородъ) напоминаетъ, что введеніе въ курсъ математики тѣхъ основъ, о которыхъ говорилъ П. А. Некрасовъ, уже было предусмотрѣно Министерствомъ Торговли и Промышленности при условіи учрежденіи восьмого класса, въ программѣ котораго эти главы носятъ названіе политической ариѳметики.

П. А. Гостиннопольскій (Барнаулъ). „Коммерческія учебныя заведенія сильны своими спеціальными предметами, какъ техническія, художественныя и др.—своими. При всемъ желаніи нельзя урѣзать спеціальные предметы до такой степени, чтобы сравнять коммерческія училища съ реальными. И преслѣдуя цѣли общаго образованія, мы рискуемъ не дать ни реальнаго, ни коммерческаго образованія."

А. Ѳ. Гатлихъ (Москва). „Коммерческія училища, по существу, не удовлетворяютъ своему назначенію. Въ послѣдніе годы открылось много коммерческихъ училищъ, благодаря извѣстнымъ

историческимъ условіямъ, и они обратились въ реальныя училища съ преподаваніемъ коммерческихъ наукъ. Но Россіи нужны коммерческія училища, которыя удовлетворяли бы своему назначенію. Посему необходимо обсудить вопросъ—какая программа математики желательна въ курсѣ правильно поставленныхъ коммерческихъ училищъ".

Л. П. Ильяшевичъ (ст. Окуловка, Ник. ж. д.). „Коммерческія училища въ настоящее время въ большинствѣ случаевъ не носятъ характера профессіональныхъ училищъ, а имѣютъ общеобразовательный характеръ. Если взять даже тѣ нѣсколько училищъ, которыя имѣютъ профессіональный характеръ и посмотрѣть—посвящаютъ ли себя окончившіе такую школу коммерческой дѣятельности, то мы увидимъ, что большинство изъ нихъ идутъ въ высшія учебныя заведенія. Отсюда слѣдуетъ, что идущіе въ коммерческія училища вовсе не ставятъ себѣ цѣлью получить профессіональное образованіе.

Во всякомъ случаѣ, о преобразованіи училищъ такого типа умѣстно говорить въ болѣе широкомъ собраніи.

Если говорить о коммерческихъ училищахъ, имѣющихъ общеобразовательный характеръ, то о постановкѣ преподаванія математики въ нихъ цѣлесообразнѣй говорить въ общей секціи".

А. И. Филипповъ (Могилевъ-Под.). „Для того, чтобы коммерческимъ училищамъ придать спеціальный характеръ, надо преобразовать преподаваніе ариѳметики въ младшихъ классахъ. Здѣсь центръ тяжести вопроса, а не введеніи спеціальныхъ предметовъ въ высшихъ классахъ. Поэтому надо ввести преподаваніе коммерческой ариѳметики, начиная съ младшихъ классовъ.

Въ I-мъ классѣ можно ввести простѣйшіе товарныя вычисленія составленіе счетовъ. Во 2-омъ классѣ—простѣйшія калькуляціи и въ III-мъ классѣ—процентныя вычисленія, преобразованіе пробъ, монетныя вычисленія".

В. Г. Морачевскій (Кривой Рогъ) указываетъ на то, что нельзя игнорировать тѣхъ отдѣловъ математики, которые нужны будущему промышленнику и коммерсанту, причемъ эти отдѣлы должны соотвѣтствовать тѣмъ запросамъ, которые выставляетъ жизнь, требующая созданія образованныхъ работниковъ и людей, подготовленныхъ къ коммерческой дѣятельности. В. Г. Морачевскій предлагаетъ позаботиться о томъ, чтобы на слѣдующемъ Съѣздѣ Преподавателей Математики была образована секція по преподаванію математики въ коммерческихъ училищахъ.

Въ заключеніе Секція вынесла слѣдующія постановленія:

I. Желательно на слѣдующемъ Съѣздѣ Преподавателей Математики образовать секцію по преподаванію математики въ коммерческихъ училищахъ.

II. На слѣдующемъ Съѣздѣ пересмотрѣть программу математики коммерческихъ учебныхъ заведеній.

III. Желательно на Съѣздѣ разсмотрѣть вопросъ о возможности введенія въ курсъ коммерческихъ училищъ основанія теоріи вѣроятностей и ея приложеній.

Алфавитный списокъ лицъ, выступавшихъ на Съѣздѣ въ собраніяхъ Секцій.

Перечень докладовъ,

вошедшихъ въ 1-й и 2-й томы «Трудовъ I-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики». *)

*) Перечень этотъ составленъ примѣнительно къ § 4-му Положенія о Съѣздѣ (т. I-й, стр. XV).

**) Римскими цифрами обозначены томы, арабскими—страницы.

3	О реальномъ направленіи преподаванія мат-ки въ связи съ жизненными и научными фактами.	*И. Н. Володкевичъ.*	II. 97—123 135—136
4	Математическое и философское преподаваніе въ средней школѣ.	*Проф. А. В. Васильевъ.*	I. 8—24
5	Цѣли, формы и средства введенія историческихъ элементовъ въ курсъ мат-ки средней школы.	*Пр.-доц. В. В. Бобынинъ.*	I. 129—149
	Учебная литература; наглядныя пособія.		
1	Обзоръ литературы по ариѳметикѣ младшихъ и среднихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній.	*В. Х. Майдель.*	II. 53—61
2	Обзоръ четырехъ учебниковъ по ариѳ-кѣ.	*Л. Н. Тяпкина.*	II. 61—67
3	Обзоръ современной учебной литературы по алгебрѣ.	*Б. Б. Піотровскій.*	II. 10—34
4	Обзоръ нѣкоторыхъ руководствъ по элементарной геометріи.	*А. Р. Кулишеръ.*	II. 37—53
5	Обзоръ литературы на русскомъ языкѣ по методикѣ ариѳ-ки.	*В. Р. Мрочекъ.*	II. 68—72 130—134
6	Примѣрный библіотечный каталогъ.	*К. Н. Деруновъ.*	II. 34—37
7	Наглядныя пособія.	*Д. Э. Теннеръ.*	I. 223—244
	Методологія и методика; планы и программы курса математики средней школы; экзамены.		
1	Методъ обученія математикѣ въ старой и новой школѣ.	*К. Ѳ. Лебединцевъ.*	II. 207—208 318—319
2	Объ измѣненіи метода обученія въ низшей и средней школѣ.	*Д. Д. Галанинъ.*	II. 190—201

2	Курсы для подготовленія кандидатовъ на учительскія должности въ кадетскихъ корпусахъ.	*С. Н. Шохоръ Троцкій.*	I. 555—558
3	Временные педагогическіе курсы Кіевскаго учебнаго округа.	*Н. А. Долгушинъ.*	I. 558—560
4	Женскій Педагогическій Институтъ.	*Н. Н. Гернетъ.*	I. 560
5	Учительскія семинаріи.	*Н. Т. Зубковъ.*	I. 560—564
	Дѣятельность математическихъ обществъ и кружковъ.		
1	Математическое отдѣленіе Рижскаго Педагогическаго Общества.	*Ѳ. А. Эрнъ.*	I. 287—295
2	Варшавскій кружокъ преподавателей мат-ки.	*Н. А. Пажитковъ.*	I. 296—298
3	Математическо-физическій кружокъ въ Варшавѣ.	*В. Р. Мрочекъ.*	I. 298—299
4	Орловскій физико-математическій кружокъ.	*Н. Н. Острогорскій.*	I. 299—300
5	Новочеркасскій математическій кружокъ.	*Г. Н. Кузнецовъ.*	I. 300—301
6	Московскій математическій кружокъ.	*І. И. Чистяковъ.*	I. 301—303
7	Нижегородскій математическо-астрономическій кружокъ.	*В. В. Мурашевъ.*	I. 303
8	Отдѣлъ математики Педагогическаго Музея в.-уч. зав. (Пет.).	*Д. М. Левитусъ.*	I. 304—316
	Научные доклады.		
1	О постулатахъ, лежащихъ въ основаніи понятія о величинѣ.	*Пр.-доц. С. О. Шатуновскій.*	I. 276—287
2	О преобразованіи многогранниковъ.	*Проф. В. Ѳ. Каганъ.*	I. 579—604

Списокъ членовъ и гостей Съѣзда.

Звѣздочки означаютъ гостей Съѣзда. Если при фамиліи не поставлено званія, то надо подраз. преп. мат.

1 Абрамовичъ, Ив. Гавр., Бѣлостокъ.
2 Авгулисъ-Авгулевичъ, Яросл. Осип., Ташкентъ.
3 Авдыковичъ, Дм. Ант., Тула.
4 Аврамовъ, Евг. Павл., С.-Петербургъ.
5 Ага Нейманъ, Сол. Абр., Камратъ, Бессар. г.
6 Агарковъ, Бор. Иван., Кобеляки, Полтавск. губ.
7 Агрономовъ, Ник. Алекс., Ревель.
8 Агура, Алекс., Дмитр., прив.-доц., Одесса.
9 Адаменко, Василій Флор., Черниговъ.
10 Адріановъ, Вас. Вас., Н. Новгородъ.
11 *Айзенштейнъ, Копель Аврум., канд. ком. наукъ, С.-Петербургъ.
12 Акинфіевъ, Ник. Вас., Тифлисъ.
13 Акимовичъ, Ник. Вас., Одесса.
14 Аксюкъ, Анат. Павл., зав. гимн., С.-Петербургъ.
15 Аксюкъ, Екат. Павл., Харьковъ.
16 Алавердянцъ, Георг. Дав., Ст. Лабинская, Куб. области.
17 Александровъ, Алекс. Георг., Одесса.
18 Александровъ, Дан. Александр., С.-Петербургъ.
19 Александровъ, Ив. Иван., Москва.
20 Александровъ, Ник. Ив., Симферополь.
21 Аленицынъ, Евг. Ник., С.-Петербургъ.
22 Алферова, Ал. Самс., Москва.
23 Альбертъ, Леонг. Андр., Никол. Городокъ, Саратов. губ.
24 Альмквистъ, Матильда Львов., С.-Петербургъ.
25 Аммосовъ, Алексѣй Митр., директ. реальн. уч., Темрюкъ.
26 Андреевъ, Алексдр. Петр., Владикавказъ.
27 *Андреевъ, Викт. Андр., оконч. Унив., Краснослободскъ, Пенз. губ.
28 Андріановъ, Влад. Иллар., С.-Петербургъ.
29 Андрушкевичъ, Леон. Адам., дир. комм. уч., Ямбургъ.
30 Аникѣева, Вѣра Петр., Саранскъ Пензенск. г.
31 Аннусъ, Янъ Янов., Либава.
32 Антаева, Екатерина Николаевна, Воронежъ.
33 Антоновъ, Влад. Мих., Вытегра, Олон. губ.
34 Антоновъ, Григ. Ник., Барнаулъ.
35 Антоновъ, Ник. Ив., С.-Петербургъ.
36 Антроповъ, Конст. Матв. С.-Петербургъ.
37 Арбузовъ, Вал. Мих., директ. ремесл. уч. Цес. Николая, С.-Петербургъ
38 Архангельскій, Серг. Павл., Ржевъ., Тверск. губ.
39 Архангельскій, Серг. Конст., С.-Петербургъ.
40 Архимовичъ, Александра Эдуард., Кіевъ.
41 Архимовичъ, Зин. Алоизьевичъ, дир. коммерч. учил., Кіевъ.
42 Афанасьевъ, Алексѣй Дмитр., С.-Петербургъ.
43 Аѳонская, Зин. Алекс., Вольскъ, Полт. губ.
44 Бабанскій, Евг. Вас., С.-Петербургъ.
45 Бабаджанъ, Авр. Веніам., Симферополь.
46 Бабичевъ, Осд. Андр., Одесса.
47 Базаревичъ, Мих. Фед., Окр. Инспект., Казань.
48 Баишева, Айпуль-Хаяшъ Мухамеджановна, Саранскъ, Пенз. губ.
49 Байдалаковъ, Мих. Иван., дир. ком. уч., Конотопъ, Черниг. губ.
50 Байеръ, Александръ Оттовичъ, директ. ком. уч., Полтава.
51 Бакуменко, Ив. Андр., Мелитополь, Тавр. губ.
52 Балабуха, Игорь Влад., Одесса.
53 Балатюкъ, Вас., Никит., Немировъ, Под. губ.

54 *Балдина, Екат. Ермол., слуш. в. жен. курс., Спб.
55 Балковскій, Вик. Ив., Глуховъ, Черн. губ.
56 Баранова, Люб. Конст., Екатеринбургъ.
57 Барановъ, Петръ Алекс., Москва.
58 *Баранъ, Елиз. Сем., слуш. выс. ж. курс., Спб.
59 Баранчакъ, Влад. Ив., Маріуполь, Екат. губ.
60 Барсовъ, Бор. Петр., С.-Петербургъ.
61 Бартошевичъ, Ад. Іосиф., Боровичи, Новгор. г.
62 Бартцъ, Рих. Ѳеод., Кишиневъ.
63 Барховъ, Григ. Вас., инсп. р. уч., Ревель.
64 Бастуновъ, Алексѣй Алекс., Вольскъ.
65 Бастрыгина, Лар. Алекс., Барнаулъ, Томск. губ.
66 Батмановъ, Ив. Емел., Москва.
67 Бауманъ, Вал. Эдг., Ливны, Орл. губ.
68 Бахтадзе, Георгій Петр., Серпуховъ, Моск. губ.
69 Башинскій, Ромилъ Ив., С.-Петербургъ.
70 Безакъ, Ник. Алекс., С.-Петербургъ.
71 Бекъ, Левъ Фед., Карсъ.
72 Бенинъ, Бор. Ант., Гжатскъ, Смол. губ.
73 Бергъ, М. О., завѣд. Реформ. уч., Москва.
74 Березина, Вѣра Влад., С.-Петербургъ.
75 Березкинъ, Алекс. Мих., Виндава, Курл. губ.
76 *Березовскій, Манасій Осип., инж. техн., С.-Петербургъ.
77 Беренгартенъ, Ольга Алекс., Коломна, Моск. губ.
78 Беридзе, Іос. Рост., Николаевъ, Херс. губ.
79 Бернштейнъ, Серг. Нат., пр.-доц., Харьковъ.
80 Билима-Пастернаковъ, Андр. Фил., инсп. 7 гимн., Варшава.
81 Благовидовъ, Алексѣй Як., Бѣлостокъ.
82 Блиновскій, Пет. Як., Перм. г., Касминск. зав.
83 Бобейко, Ант. Фед., Радомъ.
84 Боборыкинъ, Конст. Хрисанф., Слуцкъ, Мин. г.
85 Бобрикъ, Зинаида Алекс., Кронштадтъ.
86 Бобылевъ, Влад. Никол., Царское-Село.
87 Бобынинъ, Викт. Викт., проф., Москва
88 Бобятинскій, Ал-др. Ал-др. Вильно.
89 Богашевъ, Ник. Алекс., Херсонъ.
90 Богомазъ, Сем. Корн., Ростовъ н/Д.
91 Богомоловъ, Степ. Александр., преп. Политехн. и Пед. инст., С.-Петербургъ.
92 Богославскій, Бор. Юліев., Царицынъ.
93 Богоявленская, Софія Петровна, Ст. Славянск., Кубанск. Обл.
94 Богоявленскій, Ив. Андр., Н.-Новгородъ.
95 Богусъ, Влад. Ив., Ейскъ, Кубанск. обл.
96 Бодрова, Марія Алекс., Камышинъ. Сарат. губ. Ж. Г.
97 Бойко, Алексѣй Тим., Рига.
98 Бойцовъ, Иванъ Михайлов., Свислочь, Гродн. г.
99 Болдыревъ, Влад. Ал-др. инспект. пиротехн. учил., С.-Петербургъ.
100 Больше - Гагаринскій, Влад. Конст., Выборгъ.
101 Боль. Луиза Генр., г. Слободской, Вятск. губ.
102 Блюменфельдъ. Мих. Ром., С.-Петербургъ.
103 Борисовъ, Харит. Игнатьев., инсп. прогимназіи. Село Городецъ, Нижегород. губ.
104 Бочекъ. Евгенія Влад., Грайворонъ, Курск. губ.
105 Браунъ, Петръ Петр., Павловскъ, Ворон. губ.
106 Брянскій, Никол. Аполлин., С.-Петербургъ
107 *Брусиловскій, Гр. Конст., студ. Унив., Спб.
108 Бугославская, Нат. Григ., Москва.
109 *Будалева, Лид. Вас., дом. учит., С.-Петербургъ.
110 Будянскій, Влад. Вас., Черкассы.
111 Буйницкій, Леон. Фауст., Баку.
112 Буланова, Елена Ив., С.-Петербургъ.
113 Булгаковъ, Ник. Венед., Астрахань.
114 Булгаковъ, Ник. Ник., Лодзь.
115 Булдыревъ, Сер. Матв., Двинскъ.
116 Булдырская, Евг. Гурьевна, Боровичи, Новг. г.
117 Булычевъ, Ал. Мих., дир. м. гим., Ставрополь-губ.
118 Бунимовичъ, Евгеній Никол., Бѣлостокъ.
119 Бурневскій, Дм. Никиф., Кіевъ.
120 Бурцевъ, Сер. Ив., Екатеринодаръ, Куб. обл.
121 Бутягинъ, Алекс. Серг., Москва.
122 Бухаринъ, Ив. Гавр., Москва.
123 Быкова, Варвара Николаевна, С.-Петербургъ.
124 Буковская, Зоя Іосиф., С.-Петербургъ.

125 Быстровъ. Бор. Ал-др. Киржачъ. Влад. губ.
126 Бѣлкинъ, Дм. Зах., Иркутскъ.
127 Бѣлогорскій, Ив. Анат.. инсп. кл. Орл.-Бахт. кад. корп., Орелъ.
128 Бѣлоярцевъ, Ѳед. Алекс.. Астрахань.
129 Бѣляева, Елиз. Вас.. Бѣлозерскъ, Новг. губ.
130 Бѣляевъ, Ив. Вас., дир. реальн. уч. Выборгъ.
131 Бѣлько, Ив. Кипр., Пятигорскъ
132 Бѣльскій, Вас. Вас., дир. реальн. уч., Ливны, Орл. губ.
133 Бѣляевъ, Николай Павл. Харьковъ.
134 Бѣльтеневъ, Ив. Мих., Вольмаръ, Лифл. губ.
135 Бѣлюнасъ, Чеславъ Ант. Рѣжица Витебск. губ.
136 Бѣлянкинъ, Алек. Степ., С.-Петербургъ.
137 Бѣлянкинъ, Ив. Ив., проф. Харьковъ.
138 Блюмбергъ, Гансъ Жанно, Спб. Крестов. Остр. Морской 41, кв. 22.
139 Вагинъ, Пет. Петр., Сызрань, Симб. губ.
140 Вакерманъ, Иванъ Мартын., Директ. Мужск. Гимн., г. Александр.-Грушев.
141 Валькъ, Ив. Вас., Юрьевъ, Лифл. губ.
142 Вальманъ, Анна Ник., С.-Петербургъ.
143 Вальтеръ, Над. Конст., Гродно.
144 Варагушинъ, Вас. Мих., Екатеринод., Куб. обл.
145 Варгинъ, Мих. Андр., Орелъ.
146 Васильева, Алекс. Ѳеофил., С.-Петербургъ.
147 Васильева, Ольга Ник., Красноуфимскъ, Перм. губ.
148 Васильева, Іул. Мих., Грязовецъ.
149 Васильевъ, Ал. Вас., профес., С.-Петербургъ.
150 Васильковъ, Кап. Сем. Рига.
151 Вахрушева, Людмила Андреевна, Спб.
152 Вахтина, Елена Вас., нач. гимн., Дербентъ, Дагест. обл.
153 Ващенко-Захарченко, Людм. Як., Мог.-Подол.
154 Ващинская, Марія Андр. Минскъ.
155 Веберъ, Алекс. Федор., Окруж. Инсп., Харьковъ.
156 Верховскій, Пав. Мих., дир. ком. уч., Ростовъ-на-Дону.
157 Вержиковскій, Аоан. Матвѣевичъ, Павлоградъ, Екатерин. губ.
158 Ветуховъ, Алекс. Вас., Харьковъ.
159 Викторовъ, Ник. Вас., Эривань.
160 Винарскій, Пет. Генр., Конотопъ, Черн. губ
161 Виницкій, Гр. Сам., Ростовъ на-Дону.
162 Виноградова, Анна Вас., Курскъ.
163 Виноградова, Мар. Вас., Кострома.
164 Виноградова, Юлія Мих., Великій Устюгъ, Вологод. губ.
165 Виноградовъ, Ив. Ал., председ. Пед. Сов. женск. гимн., Старая Русса.
166 Виноградовъ, С. Н., Москва.
167 Виноградская, Ольга Афиног., нач. гим., Москва.
168 Винокурова, Анна Алексѣев., Усмань, Тамб. губ.
169 Винокуровъ, Бор. Павл., Варшава.
170 Вишняковъ, Сер. Ник., С.-Петербургъ.
171 Влайковъ, Степ. Ник., Бендеры, Бессар. губ.
172 Власова, Марія Ѳедоровна, С.-Петербургъ.
173 Вожакова, Евгенія Д., Одоевъ, Тульск. губ.
174 Воиновъ, А. Д., Павловскъ, Воронежск. губ.
175 Войтенко, Дм. Павл., Новозыбковъ, Черн. губ.
176 Войцѣховскій, Стан. Алекс., Екатеринославъ.
177 Вознесенская, Елиз. Ник., С.-Петербургъ.
178 Вознесенская, Над. Ник., С.-Петербургъ.
179 Вознесенскій, Ник. Петр., Курскъ.
180 Волкова, Елена Вас., С.-Петербургъ.
181 Волковъ, Алекс. Алекс., Москва.
182 Волковскій, Дмитр. Лукичъ, Москва.
183 Володкевичъ, Ник. Ник., дир. ком. уч., Кіевъ.
184 Волокобинскій, Михаилъ Евгеніевичъ, Рига.
185 Вонсовскій, Казим. Владисл., Обл. в. Донского, ст. Усть-Медвѣдицкая.
186 Воробьева, Ольга Ив., Гадячъ, Полт. губ.
187* Воронина, Екат. Петр., сл. в. ж. кур., С.-Петерб.
188 Вороновъ, Ник. Ив., инсп. кад. корп., Псковъ.
189 Воскресенскій, Пав. Мих., Ливны, Орл. губ.
190 Воскресенскій, Мих. Петр., Скопинъ, Рязан. губ.
191 Воцелка, Григ. Фед., Лубны, Полт. губ.
192 Вулихъ, Зах. Зах., С.-Петербургъ.
193 Выходцевъ, Алекс. Ник., инсп. муж. гим., Бердянскъ.

194 Гавриловъ, Илья Андреевичъ, С.-Петербургъ.
195 Гавриловъ, Ив. Алекс., село Б. Дедеркалы, Волынской губ.
196 Гаганидзе, Марія Конст., Ярославль.
197 Гачечиладзе, Ив. Эраст. Темрюкъ.
198 Галанинъ, Дм. Дм. Москва.
199 Галунова, Софія Павл., С.-Петербургъ.
200 Гардцъ, Марія Георгіевна, С-Петербургъ.
201 Гаряевъ, Раиса Севастьян., Харьковъ.
202 Гартьера, Влад. Иван., С.-Петербургъ.
203 Гатлихъ, Ал. Фед., Москва.
204 Гебель, Валер. Яковлев., директ. мех.-технич. уч., Москва, Савинск. пер.
205 Гельдъ, Ал. Ив, дир. р. уч., С.-Петербургъ.
206 Гельманъ, Вик. Ив., Астрахань.
207 Георгіевскій, Никол. Никол., С.-Петербургъ.
208 Гербко, Влад. Алекс., Новоалександрія, Любл. губ.
209 Гернетъ, Надежда Ник., проф. Пед. Инст., С.-Пб.
210*Герцбергъ, Бор. Леопольд., инж.-технол., С.-Петербургъ.
211 фонъ-Герцъ, Наталия Никол., С.-Петербургъ.
212 Гильвегъ, Влад. Карл., дир. р. уч., Зарайскъ, Рязан. губ.
213 Гиляровская, Зоя Алексѣевна, Рязань.
214 Гиро, Фридр. Юліан., Варшава.
215 Гирманъ, Сергѣй Никитичъ, Люблинъ.
216 Глаголева, Людм. Вас., С.-Петербургъ.
217 Глаголевъ, Ив. Павл., С.-Петербургъ.
218 Глаголева, Александра Алекс., Москва.
219 Гнѣдовскій, Дмитр. Дмитр., Гомель, Могилев. губ.
220 Годневъ, Алексѣй Вас., дир. ж. гимн. Симбирскъ.
221 Гозаловъ, Мих. Март., подполк., Симбирскъ.
222 Головкинская, Ольга Никол., Винница, Подол. губ.
223 Гольденбергъ, Авен., г. Каховка, Таврич. губ.
224 Голенкина, Елизав. Петр., Духовщина, Смол. губ.
225 Гончаровъ, Павелъ Максимов., С.-Петербургъ.
226 Гончаровъ, Пав. Сем., Владивостокъ.
227 Горбаконь, Мих. Серг., Маріуполь.
228 Гордѣева, Вѣра Вас., Вольскъ, Сарат. губ.
229 Горденинъ, Ипол. Митроф., Умань, Кіевск. губ.
230 Гордонъ, Мих. Борис. Кіевъ.
231 Горецкая, Ольга Николаевна, Бѣлостокъ.
232 Горстъ, Анатол. Мих., Москва.
233 Горшечниковъ, Григ. Ив., Таганрогъ.
234 Горяиновъ, Гавр. Гавр., Н.-Новгородъ.
235 Госъ, Карлъ Ив., Өеодосія.
236 Гостинопольскій, Никол. Алекс., инсп. торг. шк., г. Барнаулъ.
237 Гофманъ. Вас. Вас., Проскуровъ, Под. губ.
238 Грабовскій, Конст. Никол., Полтава.
239 Граковъ, Д. В. Гжатскъ.
240*Грапъ, Исаакъ Марковичъ, дом. уч., Спб.
241 Граудъ, Ив. Як., Павловскъ, Ворон. губ.
242 Грацинская, Анна Вас., С.-Петербургъ.
243 Граціанскій, Ив. Ив., С.-Петербургъ.
244 Грачевъ, Өед. Вас., С.-Петербургъ.
245 Грачевъ, Вас. Вас., инсп. реальн. учил., Гатчино.
246 Гренбергъ, Карлъ Алекс., Поневѣжъ, Ков. г.
247 Грецова, Елиз. Аким., Тула.
248 Григорьевъ, Андр. Афанас., Екатеринбургъ.
249 Григорьевъ, Евген. Ив., Саратовъ.
250 Григорьевъ, Сем. Степ., С.-Петербургъ.
251 Григорьевъ, Алекс. Мих., Симбирскъ.
252 Григорьева, Евгенія Валентин., С.-Петербургъ.
253 Григорьянцъ, Ник. Арт. Новороссійскъ.
254 Григучъ, Николай Георгіевичъ, Самаркандъ.
255 Гриманъ, Веніам. Сол., С.-Петербургъ.
256 Гриненко, Никол. Прокоф., Харьковъ.
257 Гриякевичъ, Викт. Ксаверіев., Псковъ.
258*Гродецкій, Мих. Вас., студ. матем. Спб. унив., С.-Петербургъ.
259 Громова, Александра Вас. г. Кузнецкъ, Сарат. губ.
260 Громова, Анна Ник., г. Темниковъ, Тамбов. губ.
261 Грузинцевъ, Иванъ Георгіевичъ, Кологривъ, Костром. губ.
262 Грюнбергъ, Теннисъ Андр., Валкъ, Лифл. губ.
263 Гудина, Марія Никол., Оренбургъ.

264 Гуковъ, Степ. Яковл., ст. Каменская. Дон. Обл.
265 Гукъ, Андр. Дмитр., Ровно.
266 Гурандъ, Никол. Власьев., С.-Петербургъ.
267 Гурджанидзе, Евгенія Игнат., Харьковъ.
268 Гуриновъ, Серг. Поликрат., Нѣжинъ.
269 Гусаковская, Праск. Васил., Тихвинъ, Новг. губ.
270 Гусева, Іул. Ив., Трубчевскъ, Орлов. губ.
271 Гусевъ, Θеод. Вас., Москва.
272 Гуссовъ, Викт. Макар., дир. Алексѣев. комм. уч., Кременчугъ.
273 Гущинъ, Василій Федоровичъ, Псковъ.
274 Гюнтеръ, Николай Максимов., проф., С.-Петербургъ.
275 Давиденковъ, Ник. Ив., дир. реал. уч., Скопинъ.
276 Давидовъ, Рубенъ Каиріел., Кишиневъ.
277 Даниловскій, Ал. Ал., Рыбинскъ.
278 Даніель, Михей Киріаков., Екатеринодаръ.
279 Даринскій, Алексѣй Ильичъ, С.-Петербургъ.
280 Де-Лазари, Алекс. Ник., Гатчина.
281 Денисьевскій, Сем. Андр., дир. ком. уч., Кіевъ.
282 Дерингъ, Серг. Генр., С.-Петербургъ.
283 Деруловъ, Констант. Николаев., С.-Петербургъ.
284 Дерябкинъ, Ив. Сем., С.-Петербургъ.
285 Джигитъ, Сам. Дав., Камратъ, Бес. губ.
286 Дзямарскій, Станис. Яковлев., Лабор. Политехн. Института, Варшава.
287 Дирдовскій, Анат. Ив., Мозырь, Минск. губ.
288 Діанина, Нат. Ник., Луга.
289 Дмитріевъ, Конст. Алексѣев., С.-Петербургъ.
290 Добровольская, Ек. Андр., г. Устюжна, Новг. г.
291 Добровольскій, Ник. Ив., Юрьевъ.
292 Добровольскій, Евг. Ив., Екатеринославъ.
293 Добровольскій, Мих. Александр., Сердобскъ.
294 Доброхотовъ, Петръ Мих., Тобольскъ.
295 Довгаль, Дм. Ив., Елецъ, Орлов. губ.
296 Довгирдъ, Мих. Θадд., С.-Петербургъ.
297 Долгушинъ, Пав. Александр., Кіевъ.
298 Доливо-Добровольская, Софья Гавр., С.-Петербургъ.
299 Долинко, Влад. Лазар., Тула.
300 Домбровскій, Левъ Феликс., С.-Петербургъ.
301 Домбровскій, Θедоръ Андреев., Саратовъ.
302 Домброва, Владиславъ Владислав., Варшава.
303 Добошинская, Ольга Іосиф., Гатчина.
304 Дрбоглавъ, Ал. Іос., инспект комм. училища, Тифлисъ.
305 Дробязко, Мих. Павлов., дир. р. уч., Сумы.
306 Дроздовъ. Влад. Ник., Острогожскъ.
307 Дубровинъ, Александръ Вас., Баку.
308 Дубравинъ, Влад. Ив., Псковъ
309 Дувина, Анаст. Евг., С.-Петербургъ.
310 Дульскій, Θаддей Ромуальд., Томскъ.
311 Дыклопъ, Анна Петровна, С.-Петербургъ.
312 Дыховъ, Дм. Ив., С.-Петербургъ.
313 Евреиновъ, Ник. Дмитр., С.-Петербургъ.
314 Евтушенко, Θед. Вас., Александровскъ, Екатеринославской губ.
315 Егеръ, Елия. Осод., Тобольскъ.
316 Егорова, Леон. Андр, Екатеринодаръ.
317 Егоровъ, Леон. Ал., Екатеринославъ.
318 Егоровъ. Влад. Вас., Москва.
319 Егуновъ, Влад. Алекс., С.-Петербургъ.
320 Егуновъ, Ив. Андр., С.-Петербургъ.
321 Езерскій, Георг. Михайл. Витебскъ.
322 Ектовъ, Михаилъ Иванов., инсп. р. уч., Липецкъ, Тамб. губ.
323 Еланскій, Мих. Петр., С.-Петербургъ.
324 Елизаровъ, Вас. Мих., Ярославль.
325 Елховскій, Ал. Арс., м. Бѣжица Орлов. губ.
326 Ельцова, Над. Акинд., Витебскъ.
327 Емельянова, Сераф. Прок., Владивостокъ.
328 Енько, Петръ Дм., дир. уч. глух., С.-Петербуръ.
329 Епифановъ, Ал-ръ Зинов., Замостье. Любл. г.
330 Ермакова, Надежда Ив., Сумы, Харьк. губ.
331 Ефимовъ, Влад. Павл., Малмыжъ, Вятск. губ.
332 Ефремовичъ, Вас. Порф., Москва.

333 Ефремовъ, Дм. Дмитр., Иваново-Вознесенскъ.
334 Жанколя, Як. Исид., С.-Петербургъ.
335 Жданко, Григ. Иван., Вильна.
336 *Жданъ-Пушкинъ, Ник. Андр., преп. естествозн., Екатеринодаръ, Кубан. обл.
337 Жемайтисъ, Сиг. Осип., Вильна.
338 Жилинскій, Алекс. Ив., Москва.
339 Жуганъ, Емел. Діом., Елисаветградъ.
340 Жулковъ, Бор. Осип., г. Люблинъ.
341 Заболотская, Алекс. Ник., Кострома.
342 Забудскій, Николай Александр., проф. Артил. Ак., С.-Петербургъ.
343 Загребинъ, Владиміръ Дмитр.. Вильна.
344 Загробскій, Октав. Тимоѳ., Сѣдлецъ.
345 Загулинъ, Вас. Ермол., Екатеринославъ.
346 Закладный, Мих. Леонт., Армавиръ. Куб. обл.
347 Залѣсскій, Мих. Конст., Инсп. торг. школы, г. Курскъ.
348 Замашникова, Анна Зах., Темниковъ, Тамб. г.
349 Зандбергъ, Ив. Егор., Гольдингенъ, Курл. губ.
350 Запасникъ, Брон. Кипр., Саратовъ.
351 Запорожецъ, Леон. Григ., Харьковъ.
352 Запорожецъ, Алекс. Григор., Харьковъ.
353 Запрягаевъ, Алекс. Владим., хут. Романовскій, Куб. обл.
354 Зарочинцевъ, Ив. Трофим., Богодуховъ, Хар. г.
355 Засимчукъ, Адамъ Герас.. г. Гжатскъ.
356 Засухина, Ольга Ник., г. Ковно.
357 Захарова, Марія Ив., Ташкентъ.
358 Захаровъ, В. З., Камышинъ, Сарат. губ.
359 Захаровъ, Ник. Алекс., г. Екатеринославъ.
360 Захаровъ, Ник. Капит., Кострома.
361 Захаровъ, Алекс. Николаев., проф. Инст. Пут. Сооб., С.-Петербургъ.
362 Захарьевскій, Конст. Луппов., дир. гимн., Могилевъ-губ.
363 Зачиняевъ, Александръ Ив. инсп. уч. глух., ред. журн. «Обновленіе Школы», С.-Петербургъ.
364 Зборомірскій, Лука Ант., Новгородъ.
айцевъ, Алекс. Макс., Ярославль.
вѣревъ, Ник. Конст., С.-Петербургъ.
367 Здановичъ, Францъ Владисл., Митава.
368 Здроевскій, Стеф. Исидор., г. Рѣжица, Витеб. г.
369 Зегеръ, Серг. Матв., Москва.
370 Зенкова, Алек. Никодимовна, зав. уч., Томскъ.
371 Зерновъ, Георгій Сергѣевичъ, Москва.
372 Зенковъ, Леон. Евламп., Томскъ.
373 Зиновьевъ, Ник. Иван. Пултускъ, Варш. губ.
374 Знаменскій, Мих. Алексѣев., С.-Петербургъ.
375 Знаменскій, Петръ Вас., Кострома.
376 Зубковъ, Ив. Троф. Гори, Тифл. губ.
377 Зѣмель, Эдмундъ Христіан., Витебскъ.
378 Ивановскій, Мих. Н., Казань.
379 Ивановскій, Ник. Ив., Кременецъ, Волын. г.
380 Иванова, Варв. Александр., С.-Петербургъ.
381 Ивановъ, Александръ Алексѣев., Вильна.
382 Ивановъ, Ник. Петр. Кинель, Сам. губ.
383 Ивановъ, Ѳео. Вас., Екатеринодаръ.
384 Ивановъ, Мих. Леон., окр. инсп. Зап.-Сиб. уч. окр. Томскъ.
385 Ивановъ. Фед. Ник., Сувалки.
386 Ивановъ, Ник. Ал., Старая-Русса.
387 Ивановъ, Петръ Ал., инсп. р. уч., Могилевъ-губ.
388 Ивицкій, Евген. Паллад., Харьковъ.
389 Изволькій, Ник. Ал., Москва.
390 Износковъ, Иліод. Ал., С.-Петербургъ.
391 Ильяшева, Варв. Ник., Харьковъ.
392 Ильяшевичъ, Анан. Никол., директ. комм. уч., ст. Окуловка, Ник. ж. д.
393 Ильяшевичъ, Софія Дмитр., ст. Окуловка.
394 Имшенецкая, Марія Мих., Харьковъ.
395 Исаковъ, Леон. Дмитр., Инсп. Гл. Пал. мѣръ и вѣсовъ, С.-Петербургъ.
396 Іодынскій, Як. Варѳ., С.-Петербургъ.
397 Іозефовичъ, Пав. Матв., дир. гимн. и р. уч., Спб.
398 *Іочъ, Влад. Викт., Ковно.
399 Каверзнева, Зин. Павл., С.-Петербургъ.
400 Каверзнева, Людм. Павл. Ковно.
401 Кавокинъ, Порф. Никол., инж.-техн., Тукумъ, Курл. губ.
402 Кавунъ, Ив. Ник., инс. уч. шк., С.-Петербургъ.

403 Каганъ, Пав. Исаак., Зав. част. гимн., Вильна.
404 Каганъ, Вен. Өедор., пр.-доц., Одесса.
405 Казанская, Ларис. Ал., Павловскій пос., Моск. г.
406 Казаровъ, Арш. Іосиф., инсп. реал. учил., Ейскъ, Куб. обл.
407 Казачкова, Вѣра Алекс., Торжокъ, Новг. губ.
408 Казневская, Анна Сим., Омскъ.
409 Калининъ, Вас. Евгр., инсп. р. уч., Вологда.
410 Каллусъ, Ив. Оом., Проскуровъ, Подол. г.
411 Каленикъ, Степ. Матв., Усть-Сысольскъ.
412 Каменская, Софья Петр., Вольскъ, Сарат. г.
413 Каменская, Марья Вас., начал. гимн., Троицкъ, Оренбург. губ.
414 Канчеевъ, Анат. Алекс., Кіевъ.
415 Карамоско, Андр. Анаст., Ейскъ, Куб. обл.
416 Карасевъ, Пав. Алекс. Москва.
417 Караунъ, Ник. Ив., Рига.
418 Карновская, Нат. Лукьян., Обоянь, Курск. г.
419 Карпенко, Антон. Григор., Томскъ.
420 Карпова, Агнія Ив., С.-Петербургъ.
421 Карповъ, Всевол., Юрьевъ, Лиф. губ.
422 Катинскій, Петръ Мих., Иваново-Вознесенскъ, Влад. губ.
423 Катрановъ, Вас. Ник., Валки, Харьк. губ.
424 Каченовскій, Дмитр. Вас, Орелъ.
425 Каширинъ, Іос. Иван., Ржевъ, Твер. губ.
426 Квиникадзе, Ник. Ермол., Поти.
427 Кедринъ, Евг. Евг., Самара.
428 Кедрова, Вѣра Павл., г. Иваново-Вознесенскъ, Влад. губ.
429 Кемарскій, Серг. Михайлов., Славянскъ, Хар. г.
430 Кемецкая, Анна Михайл., пом. нач. педаг. инст., С.-Петербургъ.
431 Керлеръ, Влад. Іосиф, Одесса.
432 Кечеджіевъ, Арут. Карп., Екатеринодаръ.
433 Кику, Георг. Сав., Пятигорскъ.
434 Кирпичинскій, Ром. Ив., Стародубъ, Черниг. г.
435 Кириленко, Надежда Ник., Тула.
436 Киркилло - Стацевичъ, Агнесса Бонифант., Рига.
437 Кирсанова, Маргар. Ив., Юхновъ, Смол. г.
438 Кирцидель, Влад. Ив., инсп. реальн. уч., Екатеринбургъ.
439 Киселевъ, Андр. Петр., С.-Петербургъ.
440 Китлеръ, Евг. Влад., Оренбургъ.
441 Клапатюкъ, Петръ Яковл., инсп. гим., Севастополь.
442 Клементьева, Над. Иван., С.-Петербургъ.
443 Клепковъ, Петръ Бор., Астрахань.
444 Клефнеръ, Осипъ Владим. Одесса.
445 Клейманъ, Леон. Макс., Рогачевъ, Могилевск. г.
446 Клименко, Вас. Ив., Курскъ.
447 Климчицкая, Елена Ив., С.-Петербургъ.
448 Клоновъ, Влад. Михайл., Александровскъ, Екат. г.
449 Кобенева, Ел Никол., Кіевъ.
450 Кобелій, Өедоръ Егор. Н. Новг.
451 Ковалевъ, Вас. Мих., Каменецъ-Подольскъ.
452 Коваленко, Евг. Арс., Борисоглѣбскъ.
453 Ковенко, Алекс. Алекс., Дмитріевъ, Курск. г.
454 Ковригинъ, Ник. Ник., С.-Петербургъ.
455 Коганъ, Ал. Георг., Гатчина.
456 Козлова, Анфиса Алексѣевна. С.-Петербургъ.
457 Козминскій, Кир. Гавр. Москва.
458 Кобызевъ, Ник. Михайл., С.-Петербургъ.
459 Ковальскій, Петр. Андр., Умань, Кіев. губ.
460 Кожевникова, Вѣра Ник., Краснослоб., Пенз. г.
461 Коваковъ, Алекс Васил., Москва.
462 Козловскій, Адамъ Вячесл., Петроковъ.
463 Колобова, Анна Андр., Ст. Осколъ, Курской г.
464 Колоденко, Екат. Анис., Нахичевань-па-Дону.
465 Колонъ, Серг. Георг., Перновъ, Лифл. г.
466 Колубовская, Натал. Алексѣевна, С.-Петербургъ.
467 Комаровъ, Вяч. Вас., Сестрорѣцкъ.
468 Компанеецъ, Петръ Андр, Одесса.
469 Кондратьевъ, Влад. Алекс., дир. 8-й Спб. гимн., С.-Петербургъ.
470 Кононова, Ольга Алекс., Вел. Луки, Пск. г.
471 Коноровъ, Ал. Ник., Воронежъ.
472 Коноровъ, Серг. Ник. Воронежъ.
473 Конюховъ, Ал-др. Гурьев. Дмитровъ, Моск. г.
474 Кореньковъ, Ив. Абр., С.-Петербургъ.
475 Корвининъ, Ник. Никол., Рыбинскъ.
476 Коровинъ, Ал. Евг., Казань.
477 Коровинъ, Ник. Евг., Слободской, Вятск. губ.
478 Коротенко, Пав. Михайл., Кишиневъ.

479 Корсаковъ, Ал. Алекс., Серпуховъ, Моск. губ.
480 Корчагинъ, Алекс. Александр., С.-Петербургъ.
481 Коршъ, Елена Валент., С.-Петербургъ.
482 Косминковъ, Алексѣй Павл., Ростовъ, Яросл. г.
483 Косминковъ, Ив. Сергѣев., Егорьевскъ, Ряз. г.
484 Космодемьянская, Вѣра Васил., Витебскъ.
485 Косолапова, Ксенія Владим., Смоленскъ.
486 Костринскій, Венед. Абрам., Вильна.
487 Котельниковъ, Вас. Ив., Саратовъ.
488 Котровцевъ, Владим. Александров., Александровскъ, Екат. губ.
489 Кашкадамова, Вѣра Вас., Симбирскъ.
490. Красвскій, Конст. Генр., г. Бѣлый, Смол. г.
491 Крамаревъ, Серг. Орест., Курскъ.
492 Крамаренко, Борисъ Констант., директ. гимн., Тифлисъ.
493 Крамаренко, Владим. Иван., Сумы, Харьк. губ.
494 Краммъ, Влад. Нарцис., Звенигородъ.
495 Красникова, Марья Матв., С.-Петербургъ.
496 *Краснова, Евд. Ант., слуш. высш. женск. курс., С.-Петербургъ.
497 Краснопѣровъ, Кир. Авкс., Тамбовъ.
498 Краснопѣвцевъ, Ив. Вас., Москва.
499 Краснопольская, Юлія Ѳомин., С.-Петербургъ.
500 Краснослободскій, Мих. Ив., Екатеринославъ.
501 Крассовскій, Зевонъ Франц., Бѣлостокъ.
502 Краузе, Констант. Павл., Уфа.
503 Крашенинниковъ, Ал. Матв., Курскъ.
504 Кривицкій, Евг. Конст., Сквира, Кіев. губ.
505 Коровяцкій, Евг. Игн., Тифлисъ.
506 Крогіусъ, Ольга Александр., С.-Петербургъ.
507 Крогіусъ, Влад. Ад., С.-Петербургъ.
508 Кроянскій, Ив. Эдуард., г. Моршанскъ, Тамб. г.
509 Крыловская, Мар. Алекс., Звенигородскъ, Кіев. г.
510 Крыжановскій, Илья Михайл. Лугансмъ, Екатериносл. губ.
511 Крыжановскій, Серг. Евс., Житоміръ.
512 Крыловъ, Ник. Ив., Псковъ.
513 *Крячко, Варв. Ѳедор., слуш. высш. жен. курс., С.-Петербургъ.
514 Кувалдинъ, Ив. Дм. Скопинъ, Рязан. губ.
515 Кувязева, Зинаида Влад., Моршанскъ, Тамб. г.
516 Кудревичъ, Іосифъ Іосиф., Слонимъ, Грод. губ.
517 Кудринъ, Влад. Иван., С.-Петербургъ.
518 Кудрявцевъ, Влад. Ѳедор., Бердянскъ.
519 Кузнецовъ, Илья Кипр., ст. Каменская, Дон. обл.
520 Кузнецовъ, Ник. Пав., Варшава
521 Кузнецовъ, Георг. Порф., Новочеркасскъ.
522 *Кузнецова, Марія Ив., слушат. Педаг. Инстит. С.-Петербургъ.
523 Кузьминъ, Александръ Ильичъ. Тверь.
524 Кулишеръ, А-др. Рувимовичъ, С.-Петербургъ.
525 Кунаевъ, Пав. Михайлов., Корсунь, Симб. губ.
526 Кундіусъ, Петръ Григор., Петровск. реальн. уч., Ростовъ на Дону.
527 Куперштейнъ, Вѣра Матвѣевна, Елисаветградъ.
528 Купчикъ, Серг. Иван., Иваново-Вознесенскъ.
529 Курилко Петръ Ив., Шавли.
530 Курцъ, Рост. Григор., Кременчугъ.
531 Кусковъ, Пав. Платон., С.-Петербургъ.
532 Кутиловъ, Вас. Ник., Новоузенскъ, Самар. г.
533 Кюнъ, Роб. Оскар., Вильна.
534 Кюрзенъ, Март. Борис., Маріенбургъ, Лиф. губ.
535 Лабутинъ, Мих. Ал-др., Кіевъ.
536 Лавриновичъ, Серг. Ант., Минскъ.
537 *Лавровская, Анаст. Андр., слуш. высш. ж. курс., С.-Петербургъ.
538 Лавровъ, С. Ѳ. Муромъ, Владим. губ.
539 Лаговскій, Серг. Петр., Минскъ.
540 Лагутинскій, Мих. Ник., прив.-доц., Харьковъ.
541 Лаженицынъ, Вяч. Алекс., С.-Петербургъ.
542 Лазаревъ, Ив. Петр., Могилевъ-губ.
543 Лакомкина, Марія Алекс., Кинешма.
544 Лаптевъ, Сав. Мих., С.-Петербургъ.
545 Лапчинская, Пелагея Андр., Оренбургъ.
546 Лапшинъ, Ив. Ив., проф., С.-Петербургъ.
547 Лачъ, Исидоръ Георг., С.-Петербургъ.
548 Лебедевъ, Мих. Алекс., Рязань

519 Лебедевъ, Ив. Вас., Смоленскъ.
550 *Лебедева, Аполлин. Алекс.*, Саратовъ.
551 Лебедева, Екатер. Алекс., Саратовъ.
552 Лебединская, А. К., Тула.
553 Лебединцевъ, Конст. Өеоф., Москва.
554 Лебель, Лидія Игн., Москва.
555 *Левитская, Анна Яковл., слуш. *высш. жен. курс.*, С.-Петербургъ.
556 Ледеръ, Ник. Конст., Островъ, *Пск. губ.*
557 Левитусъ, Дав. Моис., С.-Петербургъ.
558 *Лейнсбергъ, Елиз. Нах.*, Одесса.
559 Лекторскій, Арк. Андр., Бѣла, Сѣдл. губ.
560 фонъ-Леммлейнъ, Глѣбъ Алекс., Тифлисъ.
561 Лермантовъ, Влад. *Влад., прив.-доц.*, С.-Петербургъ.
562 Леонова, Люб. Ник., Екатеринославъ.
563 Леонтовичъ, Ал. Ник., С.-Петербургъ.
564 Лерхъ-Урджевицъ, Георг. Вильгельм., Дубельнъ, Лифл. губ.
565 Лехницкій, Геор. Викторов., Кострома.
566 Лехницкая, Татьяна Ал., Кострома.
567 *Лещенко, Андр. Иван., Кіевъ.*
568 Ликовичъ, Марья Вас., Выборгъ.
569 Линда, Степ. Казим., Вильна.
570 Линдебергъ, Алекс. Карл., дир. Спб. 2-го кад. корпуса.
571 Линкинъ, Як. Андр., инсп. муж. гимн., Маріамполь.
572 *Лисовская, Ольга Валеріан. слушат. Спб. высш. женск. курс., С.-Петербургъ.
573 Лисовскій, Люц. Іос., Гжатскъ, Смол. губ.
574 Лисовскій, Як. Мих., Одесса.
575 Литвинова, Елиз. Өед., С.-Петербургъ.
576 Литвиновъ, Өед. Ник., С.-Петербургъ.
577 Литвиновскій, Никан. Фел., Варшава.
578 Литвинскій, Викт. Порф., Екатеринославъ.
579 Литвинскій, Петръ Ант., членъ уч. ком. музея и уч. ком. Учр. *Вѣд. Имп. Маріи, С.-Петербургъ.*
580 Литтеровъ, Ив. Андр., Н.-Новгородъ.
581 Лондисъ, Ал-др. Платон., С.-Петербургъ.
582 Лорткипанидзе, Иллар. Таріел., инсп. реальн. уч., Кутаисъ.
583 Лоханько, Өеод. Филип., Бѣлостокъ.
584 Лоховъ, Ник. Тер., Варшава.
585 Лубкинъ, Петръ Серг. Вильна.
586 Лукницкая, Над. Всев., Казань.
587 Лукьяновъ, Борисъ Ник., Кіевъ.
588 Лунаковъ, Пав. Серг., Одесса.
589 Лундбергъ, Эдг. Юліев., г.-м., инсп. I корп., Спб.
590 Лунькина, Нина Георг., Ставрополь.
591 *Лурье, Блюма Абр., слуш. Выс. женск. кур., С.-Петербургъ.
592 Луцицкій, Влад. Ос., Екатеринославъ.
593 Львова, Екат. Ильин., С.-Петербургъ.
594 Львовъ, Викт. Дмитр., Кунгуръ.
595 Львова, Клавд. Дмитр., С.-Петербургъ.
596 Лѣвицкая, Ал. Вас., нач. гимн., Умань, Кіевск. губ.
597 Лѣсюкъ, Сильв. Григ., зав. муж. гимн., Вилькомиръ, Ковенской губ.
598 Любовичъ, Влад. Ив., Ямбургъ.
599 Людевичъ, Ольга Юліевна, С.-Петербургъ.
600 Лютинъ, Ант. Вас., С.-Петербургъ.
601 Лямбекъ, Эмиль Эр., С.-Петербургъ.
602 Ляуре, Оттонъ Оттон., Гори.
603 *Магалифъ*, Бор. Исаак., Воронежъ.
604 Маевская, Елиз. Виктор., Лубны. Полт. губ.
605 Мазингъ, Карлъ Карл., дир. реальн. уч., Москва.
606 Мазурмовичъ, Ник. Петр., Житоміръ.
607 Майдель, бар., Влад. Христоф., С.-Петербургъ.
608 Макарова, Надежда Анполон., нач. жен. гимн., С.-Петербургъ.
609 Макаревичъ, Іосифъ Генр., С.-Петербургъ.
610 Маклашинъ, Вас. Алекс., Орелъ.
611 Макриновъ, Евгеній Ник., Бѣлополье, Харьк. губ.
612 Макшеевъ, Зах. Андр., г.-л., дир. Пед. Муз., С.-Петербургъ.
613 Маликова, Анна Андр., С.-Петербургъ.
614 Малининъ, Афан. Гавр., гл. Инсп. по уч. части Мин. Торг. и Пром., С.-Петербургъ.
615 Малиновская, Зин. Фр., С.-Петербургъ.
616 Маліева, Ольга Вас., Самара.
617 Май, Кир. Вас., дир. гимн., Петроковъ.
618 Майзель, Серг. Осипов., С.-Петербургъ.
619 Мавюкевичъ, Андр. Ив., С.-Петербургъ.
620 Максимова, Евг. Алекс., Порховъ.

621 Маловичко, Вл. Кап., Херсонъ.
622 Малышева, Вар. Никол., Хабаровскъ.
623 Мальцевъ, Як. Ильичъ, Мелитополь.
624 Мамонтова, Елена Алекс., Пятигорскъ.
625 Манчтетъ, Пав. Петр., Смоленскъ.
626 Мартьянова, Евг. Серг., С.-Петербургъ.
627 Марковъ, Абр. Ефр., С.-Петербургъ.
628 Марковичъ, Богд. Афан, С.-Петербургъ.
629 *Маркусъ, Шейна Лейб., слуш. кур. Лесг., С.-Петербургъ.
630 Марутаева, Марія Степ., г. Темниковъ, Тамб. губ.
631 Мартюшовъ, Ив. Иван., С.-Петербургъ.
632 Марцелли, Алекс. Иванов., Харьковъ.
633 Масленко, Зин. Васил., Козловъ, Тамб. губ.
634 Масловъ, Гр. Конст., С.-Петербургъ.
635 Матвѣевъ. Оед. Ник., дир. реал. учил., Юрьевъ.
636 Матюшенко, Пав. Терент., Кіевъ.
637 Махровскій, Викт. Геннад., Петровскъ, Сарат. губ.
638 Машотисъ, Францъ Ив., Рига.
639 Машотисъ, Ив. Ив., Вильна.
640 Маштакова, Марія Вас., Бобринецъ, Херс. губ.
641 Мебуришвили, Амврос. Висс.. Бѣла, Сѣдл. губ.
642 Медвѣдевъ, Алек. Иван., Воронежъ.
643 Меерсонъ, Ел. Нат., зав. нач. учил., С.-Петербургъ.
644 Меерь, Руд. Алекс., Лубны, Полт. губ.
645 Мей, Петръ Петр., Бѣлостокъ.
646 Мельникова, Домна Дав., Курскъ.
647 Меліоранскій, Влад. Мих., С.-Петербургъ.
648 Меліоранскій, Петръ Андр., С.-Петербургъ.
649 Меньшиковъ, Ив. Мих., Великій Устюгъ.
650 Мерелло, Луи Леоп., Белебей, Уфим. губ.
651 Мергасова, Анф.Степ., Астрахань.
652 Мещерскій, Алекс. Михайлов., Псковъ.
653 *Миккельсаръ, Фолрадъ Густ., Гапсаль.
654 Милютинъ, Бор. Вас., С.-Петербургъ.
655 Мининъ, Влад. Конст., Варшава.
656 Минеевъ, Андр. Дмитр., Бѣжецкъ.
657 Минюхинъ, Георг. Михайл., С.-Петербургъ.
658 Миронова, Екат. Мих., Вольскъ, Сарат. губ.
659 Мисирова, Марія Керап., С.-Петербургъ.
660 Митропольскій, Ал. Матв., Пенза.
661 Михайловъ, Влад. Дмитр., С.-Петербургъ.
662 Михельсонъ, Ник. Семен., С.-Петербургъ.
663 Михельсонъ, Сем. Алекс., С.-Петербургъ.
664 Михневичъ, Алекс. Пет., ген.-л., С.-Петербургъ.
665 Мишенькинъ, Алекс. Степ, Н.-Новгородъ.
666 Миштовтъ, Надежда Ник., С.-Петербургъ.
667 *Моисеенко-Великая, Тат. Ник., слуш. женск. полит. курсовъ, С.-Петербургъ.
668 *Моисеенко, Вал. Никол., окон. Моск. Высш. жен. курсы, Москва.
669 Молинъ, Оед. Эдуард., засл. проф. Том. Техн. Инст., г. Томскъ.
670 Молчанова, Анна Ник., Сумы, Харьков. губ.
671 Молчановъ, Ник. Конст, Вятка.
672 Морачевскій, Вячесл. Григ., дир. комм. учил., Кривой Рогъ, Херс. губ.
673 Мордухай-Болтовской, Дм. Дм, проф., Варшава.
674 Моревъ, Влад. Иванов., Борисоглѣбскъ, Там. г.
675 Моряхина, Анна Фед, С.-Петербургъ.
676 Морозовъ, Вал. Алекс., Калуга.
677 Морововскій, Сем. Целест., Ставрополь-губ.
678 Морошкинъ, Ал-дръ Иван., Москва.
679 Морсковъ, Ив. Вас., Кирсановъ, Тамбовск. губ.
680 Москвинъ, Ник. Иван., Варшава.
681 Москалевичъ, Лавр. Федоров., Вильна.
682 Мощенко, Васил. Никол., Харьковъ.
683 Мощенко, Елена Никол., Харьковъ.
684 Мрочекъ, Вацл. Ромуальд., С.-Петербургъ.
685 Мукаловъ, Николай Дмитріев., Кіевъ.
686 Мурашкинъ, Вас. Вас., С.-Петербургъ.
687 Мурашевъ, Влад. Васил., Нижній-Новгородъ.
688 Мурзинъ, Петръ Алекс., Баку.
689 Мустровъ, Ив. Ив., Ровно, Волынск. губ.
690 Мушниковъ, Владим. Федоров., С.-Петербургъ.
691 Мышинскій, Зен. Леон., С.-Петербургъ.

692 Мякининъ, Григ. Троф., Бѣлевъ, Тул. г.
693 Назаровъ, Конст. Фед., С.-Петербургъ.
694 Наймаркъ, Ник. Яковл, Вологда.
695 Нановскій, Леонъ Ксавер., слоб. Нальчикъ.
696 Неаполитанскій, Сергѣй Арк., Варшава.
697 Невтановъ, Ал-дръ. Федоров., Тифлисъ.
698 Невядомскій, Дмитр. Алексѣев., Дербентъ.
699 Недввецкій, Влад. Лукичъ, Боровичи.
700 Нейфельдъ, Влад. Адольф., Варшава.
701 Нейцъ, Ник. Алекс., Самара.
702 Некрасовъ, Алекс. Виссар. С.-Петербургъ.
703 Некрасовъ, Влад. Леонид., проф., Томскъ.
704 Некрасовъ, Влад. Алекс., С.-Петербургъ.
705 Некрасовъ, Пав. Алексѣев., проф., С.-Петербургъ.
706 Немейко, Петръ Григор., Воронежъ.
707 Немѣлова, Клавдія Алекс., Перновъ, Лифл. губ.
708 Нестеренко, Пат. Васил., ст. Волосово, Петерб. г.
709 Нестеровъ, Ник. Фед., С.-Петербургъ, Сарат. губ.
710 Нетованный, Дмитр. Марк., Бердянскъ, Тавр. г.
711 Нечаевъ, Оед. Лук., С.-Петербургъ.
712 Наревичъ, Алекс. Осип., Пинскъ.
713 Нефедьевъ, Алекс. Ник., Казань.
714 Нехорошева, Лидія Иван., С.-Петербургъ.
715 Никаноровъ, Влад. Митрофан., Ярославль.
716 *Никитинъ, В. А., ст. Пол. Инст., С.-Петербургъ.
717 Николаевъ, Андр. Николаев., Рига.
718 Николаевъ, Леон. Иван., Урюпинск. стан., обл. Войск. Дон.
719 Никоновъ, Ив. Алекс., Елабуга, Вят. губ.
720 Николаевъ, Владим. Никол. Новохоперскъ, Воронежск. губ.
721 Никульцевъ, Петръ Оед., дир. реал. уч., Гжатскъ, Смоленской губ.
722 *Новикова, Анна Никол., слуш. пед. инст., Спб.
723 Новиковъ, Вас. Васил., дир. пром. учил., гор. Красноуфимскъ, Перм. губ.
724 Новиковъ, Влад. Иван., Плоцкъ
725. Новосильцевъ, Серг. Васил., дир. комм. учил., Екатеринодаръ. Куб. обл.
726 Носовъ, Влад. Владим., С.-Петербургъ.
727 Образцовъ, Мих. Захар., С.-Петербургъ.
728 Обтемперанскій, Ив. Серг., Архангельскъ.
729 Обуховъ, Ник. Никол., Болградъ, Бесс. губ.
730 Обштейнъ, Фр. Ад., Рѣжица, Витебск. губ.
731 Овсяный, Вас. Конст., Глуховъ, Черн. губ.
732 Озолинъ, Вильг. Яковл., Митава.
733 Окосмовъ, Ив. Кондр., дир. гимн., Златополь.
734 Окуловъ, Вяч. Осіев., Бугульма, Сам. губ.
735 Ольшевскій, Алекс. Вас., М. Немировъ, Под. губ.
736 Ольшевская, Марія Каст., Новочеркасскъ.
737 Олейникъ, Степ. Семен., Житоміръ.
738 Омельяновичъ-Павленко, Варл. Павл., Лубны.
739 Омелянскій, Вл. Тих., Кинешма, Костр. губ.
740 Онищенко, Мих. Нестор., Арзамасъ, Ниж. губ.
741 Оносовскій, Ник. Порф., Хвалынскъ.
742 Оранскій, Владим. Иван., Самаркандъ.
743 Орленко, Мих. Иван., Варшава.
744 Орловъ, С. В., Рига.
745 Орловъ, Ив. Евген., Юрьевъ, Лифл. губ.
746 Орлова, Марія Мих., Острогожскъ, Воронеж. г.
747 Орловскій, Ив. Викент., дир. муж. гимн., Бобруйскъ.
748 Осинскій, Мих. Діон., Варшава.
749 Осиповъ, Алек. Никол., Александрія, Херс. г.
750 Остолоповъ, Ник. Павл., С.-Петербургъ.
751 Острогорскій, Петръ Ник., Орелъ.
752 Остроменскій, Дмитр. Антонов., Кіевъ.
753 Остроумова, Ант. Леон., Тихвинъ, Новг. губ.
754 фонъ-Отто, Андр. Витольд., Одесса.
755 Очановскій, Леон. Вл., С.-Петербургъ.
756 Павлова, Анна Петр., Пенза.
757 Павлова, Екат. Конст.. Нижн.-Новгородъ.
758 Павлова, Евг. Оедор., С.-Петербургъ.
759 Павловъ, Никол. Александр. Тифлисъ.
760 Павлиновъ, Петръ Иван., Рига.
761 Пажитновъ, Ник. Алекс., Варшава.
762 Палецкій, Конст. Август., Кіевъ.

763 Папасюкъ, Левъ Вас., Елисаветградъ.
764 Панафутинъ, Никол. Павлов., Казань.
765 Панкевичъ, Влад. Ив., С.-Петербургъ.
766 Панкинъ, Алекс. Вас., С.-Петербургъ.
767 Панченко, Вѣра Леонид., С.-Петербургъ.
768 Парадіева, Над. Никол., Екатеринодаръ.
769 Парамонова, Над. Дмитр., Оренбургъ.
770 Парфеновъ, Валент. Михайл., Петрозаводскъ.
771 Пархомовъ, Влад. Иван., Варшава.
772 Патроновъ, Вас. Никол., Балаково, Сам. г.
773 Патронъ, Пав. Антон., Одесса.
774 Пашкевичъ, Станисл. Ксаверьев., Саратовъ.
775 Пацевскій, Викт. Вас., дир. ком. уч. Кривой-Рогъ, Херс. губ.
776 Пензина, Юлія Алекс., Новгородъ
777 Певіонжкевичъ, Карлъ Болесл., дир. 12 гим., С.-Петербургъ.
778 Пенке, Александръ Александр., С.-Петербургъ.
779 Перещако, Ипполитъ Ипполит., С.-Петербургъ.
780 Перли, Оск. Пет., Ростовъ-на Д.
781 Песоцкій, Мих. Никол., Тифлисъ.
782 Петрашевская, Людм. Федор., Тифлисъ.
783 Петрова, Марія Вас., Старый-Петергофъ.
784 Петровичъ, Серг. Георг., ген.-м., С.-Петербургъ.
785 Петровичъ, Ник. Георг., С.-Петербургъ.
786 Петровъ, Конст. Михайл., Великій Устюгъ.
787 Петровъ, Влад. Ник., Егорьевскъ.
788 Петровъ, Александръ Иван., Елецъ.
789 Петропавловскій, С. Н., Рига.
790 Печковскій, Валер. Конст., Москва.
791 Пирожковъ, Александръ Васильев., Псковъ.
792 Пискуновъ, Иванъ Никол., С.-Петербургъ.
793 Пичугинъ, Алекс. Георг., инсп. пром. уч., Красноуфимскъ, Перм. губ.
794. Піотровскій, Борисъ Бронисл., С.-Петербургъ.
795 Піотровскій, Каз. Льв., Богородскъ.
796 Пламеневскій, Никол. Иван., Владикавказъ.
797 Племянникова, Викторія Рафаил. С.-Петербургъ.
798 Плеханова, Надежда Георг., Мелитополь.
799 Плоховъ, Өедоръ Гаврилов., Саратовъ.
800 Побѣдимскій, Конст. Иванов. С.-Петербургъ.
801 Погодицкій, Вячеславъ Артемьев., С.-Петербургъ.
802 Погорѣловъ, Пав. Никол., дир. р. уч., Осташковъ.
803 Погребецкая, Вѣра Тимоф., Ейскъ.
804 Подановскій, Александръ Влад., С.-Петербургъ.
805 Подгайская, Елена Сергѣев., Ровно, Волын. губ.
806 Подворчанская, Марія Моис., Екатеринославъ.
807 Подгорѣцкій, Ник. Петр., Тифлисъ.
808 Подерванскій, Николай Игнатьевичъ, Касимовъ, Рязанск. губ.
809 Подсынапинъ, Ник. Мих., Вязьма, Смолен. губ.
810 Подтягинъ, Ник. Евг., Харьковъ.
811 Покотило, Марія Иван., Кіевъ.
812 Покровскій, Алексѣй Мих., Тула.
813 Покровскій, Александръ Ник., Кострома.
814 Полетаевъ, Иванъ Иван., Москва.
815 Полосухина, Ольга Арт., С.-Петербургъ
816 Полубинская, Елизав. Павл., Рославль.
817 Полушкинъ, Евгеній Павл., С.-Петербургъ.
818 Поляковъ, Алексѣй Петр., Москва.
819 Поляковъ, Сергѣй Ник., пос. Юзовка, Екатер. г.
820 Пономаревъ, Ростисл. Дмитр., Харьковъ
821 Поповъ, Венед. Венед., Витебскъ.
822 Поповъ, Пав. Иван., С.-Петербургъ.
823 Поповъ, Мих. Петр., Лодзь.
824 Поповъ, Ник. Петр., инсп. реальн. уч., Баку.
825 Поповъ, Павелъ Иван, Москва.
826 Поповъ, Алекс. Тимоф., Подольскъ, Москов. г.
827 Поповиченко, Гавр. Сильв., Хоролъ, Полт. губ.
828 Попперэкъ, Георгій Александр., Москва.
829 Попруженко, Мих. Григ., ген.-л., С.-Петербургъ.
830 Пораковъ, Ник. Дм., С.-Петербургъ.
831 Порохова, Люб. Ник., Им. „Зорьки", Крест. у.
832 Порывкина, Вѣра Павл., Уржумъ, Вятск. губ.
833 Посѣловская, Елена Андр., Воронежъ.
834 Поссе, Конст. Алекс., проф., С.-Петербургъ.

835 Постаевъ, Мих. Яков., Харьковъ.
836 Постриганьева, Ефрос. Григ., Козловъ, Тамб. г.
837 Потоцкій, Владим. Григор., Полоцкъ.
838 Потоцкій, Пав. Иван., Москва.
839 Пржевальскій, Влад. Степ., Шуя, Влад. губ.
840 Приходько, Пав. Павл., Елисаветградъ.
841 Прозоровскій, Ник. Вас., Саратовъ.
842 Проворова, Ант. Викторов., Сызрань.
843 Просвѣтловъ, Яковъ Зин., инсп. гимназ., Валкъ, Лифл. губ.
844 Прядильщиковъ, Дмит. Григ., С.-Петербургъ.
845 Псіолъ, Ксенія Алекс., Бердичевъ, Кіевск. губ.
846 Пузиновскій, Стеф. Юліанов., Асхабадъ.
847 Пустининъ, Алексѣй Григ., Бендеры, Бессар. г.
848 Путимцевъ, Ник. Петров., Рогачевъ, Могил. г.
849 Рабиновичъ, Петръ Осип., инсп. р. уч., Перновъ, Лиф. г.
850 Рабиновичъ, Юрій Германов., Одесса.
851 Работновъ, Ник. Дмитр., Н. Новгородъ.
852 Равичъ-Щерба, инсп. кл. Ник. кад. корп., С. Петербургъ.
853 Рагозинъ, Викт. Капит., Шлиссельбургъ.
854 Радашевичъ, Игн. Никод., Кронштадтъ.
855 Радцигъ, Алекс. Алекс., проф. С.-Петербургъ.
856 Развадзе, Андрон. Мих., Скопинъ, Рязан. губ.
857 Разсказовскій, Мих. Павл., Тамбовъ.
858 Разсонскій, Сергѣй Никол., Вышній-Волочекъ, Тверск. губ.
859 Разумовъ, В. Н., Астрахань.
860 Ракитинъ, Ник. Семен., Одесса.
861 Рашевскій, Конст. Ник., Москва.
862 Ращенко, Вѣра Иван., Волковыскъ, Гродн. г.
863 Ребиндеръ, Макс. Григ., Юрьевъ, Лифл. губ.
864 *Рейнъ, Ольга Абрам., сл. в. ж. к., С.-Петербургъ.
865 Рейнольскій, Ник. Алексѣев., Кострома.
866 Рійкманъ, Авг. Иванов., Валкъ, Лифл. губ.
867 Ретановъ, Алекс. Никол., Каменецъ-Подольскъ.
868 Ржаницынъ, Серг. Витал., Оханскъ, Перм. губ.
869 Роговскій, Альбинъ Ив., Александровскъ, Екат. г.
870 Родкевичъ, Пав. Павл., дир. гимн., Витебскъ.
871 Рождественская, Клавдія Макидон., Уфа.
872 Рождественскій, Алекс. Алексан., Верхнеудинскъ.
873 Розановъ, Алекс. Ник., Рыбинскъ.
874 Розановъ, Владим. Александр., С.-Петербургъ.
875 Розенъ, Ананій Матв., Нѣжинъ, Черниг. губ.
876 Розенбергеръ, Алекс. Вас., Карачевъ, Орлов. губ.
877 Рознюкъ, Кассіанъ Карп., Лубны, Полт. губ.
878 Розумъ, Неонила Иван., Лубны, Полт. губ.
879 Рейзманъ, Александръ Моисеев., Бобруйскъ, Минской губ.
880 Романовскій, Констант. Петров., Керчь.
881 Ростковскій, Вацлавъ Андр., С.-Петербугъ.
882 Ростомовъ, Захарій Павл., С.-Петербургъ.
883 Ротаревъ, Иванъ Игнатьев., Одесса.
884 Рубецкая, Лидія Владим., Спб.
885 *Рубецкій, Өеофанъ Сергѣев., Ст. «Вырица», Моск.-В.-Рыб. ж. д.
886 Рудневъ, Вас. Лаврентьевъ., Ростовъ на Дону.
887 *Рудневъ, Дм. Дм., лаб. Педаг. музея, С.-Петербургъ.
888 Рудницкая, Евг. Квинтил., Лоздь.
889 Рулле, Алиса Фридриховна, Вольмаръ, Лиф. г.
890 Румянцева, Надежда Петровна, С.-Петербургъ.
891 Рута, Яковъ Иванов., инсп. м. прог., Варшава.
892 Рыдзевскій, Болеславъ Фелиціанов., Херсонъ.
893 Рыловъ, Сергѣй Михайлов., С.-Петербургъ.
894 Рѣдько, Дм. Алекс., Миргородъ, Полт. губ.
895 Рѣзницкій, Ефимъ Іосиф., Корчева, Твер. губ.
896 Рядновa, Таисія Никол., Москва.
897 Савватѣевъ, Леонидъ Мих., Торжокъ, Твер. губ.
898 Салтыковъ, Левъ Никол., С.-Петербургъ.
899 Самборская, Фаина Феликс., Тверь.
900 Самохвалова, Полина Григор., Зміевъ, Харьковской губ.
901 Самохваловъ, Петръ Алексѣев, С.-Петербургъ.
902 Санько, Амвросій Демьянов., Курскъ.
903 Сарвъ, Янъ Геннов., Юрьевъ, Лифл. губ.
904 Саргиджанцъ, Григ. Назар, дир. гимн., Золотоноша, Полт. губ.

905 Саткевичъ, Алекс. Александр., проф. Ник. инж. Академіи, С.-Петербургъ.
906 Сахаровъ, Алекс. Борисов., С.-Петербургъ.
907 Сахаровъ, Сергѣй Андр., Богородскъ, Москов. г.
908 Сахаровъ, Евг. Алекс., Новомосковскъ, Екатер. г.
909 Сахарова, Асенефа Ив., Богучаръ, Ворон. губ.
910 Сахновскій, Мих. Аким., Черниговъ.
911 Савичъ, Серг. Евг., проф., С.-Петербургъ.
912 Савопова, Марія Алекс., Маріамполь, Сувалк. губ.
913 Свида, Мих. Виктор., Екатеринославъ.
914 Свидерскій, Андрей Иванов., Вологда.
915 Свидерскій, Григ. Кузьм., Кіевъ.
916 Свинцовъ, Петръ Иван., С.-Петербургъ.
917 Свѣшниковъ, Пав. Ив., дир. реал. учил., Уфа.
918 Севастьяновъ, Леоп. Степан., Москва.
919 Селиверстовъ, Степ. Степ., С.-Петербургъ.
920 Сельскій, Леонидъ Алекс., Варшава.
921 Селяковъ, Ник. Яковл., Москва.
922 Семейкинъ, Евг. Ив., Сумы.
923 Семеновъ, Пав. Макс., г. Проскуровъ, Кам.-Под. г.
924 Сергіенко, Ал. Серг., кап., С.-Петербургъ.
925 Сергѣевъ, Гавр. Петр., Ярославль.
926 Серебацкій, Феликсъ Осип., Торопецъ, Псковск. г.
927 Серебренникова, Над. Конст., С.-Петербургъ.
928 *Сержинская, Софья Фед., слуш. Бест. кур., С.-Петербургъ.
929 Сигаревичъ, Дм. Дм., дир. Ком. уч., г. Александровскъ, Екат. г.
930 Сиговъ, Исаакій Алекс., С.-Петербургъ.
931 Сидоровъ, Ник. Филипп., С.-Петербургъ.
932 Сидоровъ, Павелъ Георгіев., Одесса.
933 Силиверстовъ, Ив. Вас., С.-Петербургъ.
934 Симакова, Евг. Конст., Богородицкъ, Тульск. г.
935 Синакевичъ, Влад. Ив., С.-Петербургъ.
936 Синильщиковъ, Вас. Ефим., С.-Петербургъ.
937 Синопійскій - Трофимовъ, Ник. Тріандеф., Кіевъ.
938 Синцовъ, Дм. Матв., проф., Харьковъ.
939 Синявская, Елиз. Алекс., Сызрань, Симб. губ.
940 Синявскій, А. С., дир. ком. уч., Екатеринославъ.
941 Спняверъ, Ник. Ал., Г Александровскъ, Екат. г.
942 Синявинъ, Ив. Гаврил., Митава
943 Сироткинъ, Конст. Мих., С.-Петербургъ.
944 Сканави, Ив. Алек., С.-Петербургъ.
945 Скороспѣлова, Анна Ник., Шуя Влад. губ.
946 Скрынниковъ, Вас. Степ., Елатьма, Тамбовск. г.
947 Скороходъ-Левченко, А. М., Новохоперскъ.
948 Скубченко, Мих. Моис., Златополь.
949 Славинскій, Евг. Вас. Керчь.
950 Славолюбовъ, Павелъ Никол. Ненавино, Нижег. г.
951 Слетовъ, Ник. Павлов., Рига.
952 Смирнова, Юлія Алекс., С.-Петербургъ.
953 Смирнова, Валент. Викт., С.-Петербургъ.
954 Смирнова, Марія Ильинишна, Симферополь.
955 Смирновъ, Борисъ Викт., Юзовка, Екатеринос. г.
956 Смирновъ, Пав. Агаѳангел., Самара.
957 Смирновъ, Евг. Ив., г. Юрьевъ Лифл. губ.
958 Смирновъ, Петръ Дмитр., инсп. Темирг. мужск. прог., стан. Темиргаевская, Куб. обл.
959 Смирновъ, Влад. Иванов., С.-Петербургъ.
960 Смирновъ, Павелъ Алекс., Кострома.
961 Смольевскій, Арс. Ѳед., С.-Петербургъ.
962 Снѣгирева, Елена Ѳедоровна, Новороссійскъ.
963 *Снѣжницкій, Ив. Алекс., слуш. пед. кур., Казань.
964 Соколовъ, Митроф. Александр. Москва.
965 Соболевъ, Тим. Григ., Гжатскъ Смол. губ.
966 Созонова, Анна Ив., С.-Петербургъ.
967 Соколова, Ек. Вас., Симферополь.
968 Соколовъ, Викт. Ив., Саратовъ
969 Соколовъ, Ив. Ив., Москва.
970 Соболевъ, Петръ Моисеев., Москва.
971 Соболевъ, Алекс. Васильев., Рязань.
972 Соколовъ, Ник. Самсон., дир. Яросл. Реал. Уч.
973 Соколовъ, Вадимъ Семенов., Тамбовъ.

974 Соколовъ, Вас. Алексѣев., Майковъ, Кубанск. губ.
975 Соколовъ, Ник. Павл., С.-Петербургъ.
976 Сокольская, Елив. Зах., Пенза.
977 Соколовскій, Кононъ Ив., предсѣд. Пед. Совѣта жен. гимн., Маріинскъ, Тамб. губ.
978 *Соколовскій, Сергѣй Ром., слуш. учит. кл. военн. инж., С.-Петербургъ.
979 Соловьева, Алла Влад., С.-Петербургъ.
980 Соловьевъ, Иванъ Семен., Москва.
981 Соловьевъ, Фед. Павл., С.-Петербургъ.
982 Соловьевъ, Ив. Ив., Смоленскъ.
983 Сомовъ, Пав. Іосиф., проф., С.-Петербургъ.
984 Солнышковъ, Георгій Мих., инсп. гимн., Петрозаводскъ.
985 Сольцъ, Мар. Іосиф., С.-Петербургъ.
986 Софійская, Ольга Ив., нач. жен. Маріинск. гимн., Баку.
987 Софроновъ, Серг. Алексан., Иваново-Вознесенскъ, Владимир. губ.
988 Сошникова, Марія Петр., Александровъ, Влад. губ.
989 Сперанскій, Евгеній Венедиктовичъ, Москва.
990 Срединскій, Серг. Ант., Камышинъ, Сарат. губ.
991 Срединская, Евг. Мих., Камышинъ.
992 Стандровскій, Ив. Ив., Гомель.
993 Станкевичъ, Ив. Ив., Петроковъ.
994 Старынкевичъ, Ада Дмитріевна, С.-Петербургъ.
995 Старынкевичъ, Дм. Сократ., инж.-техн., С.-Петербургъ.
996 Стебницкая, Алекс. Іероним., С.-Петербургъ.
997 Стельмаховичъ, Евл. Леонт., Весьегонскъ, Твер. губ.
998 Степанова, Лидія Ильин., Ревель.
999 Струве, Вас. Бернардов., дир. Меж. Ин., Москва.
1000 Струкова, Елена Иван., Верхотурье.
1001 Стурцель, Борисъ Рудольфов., Лодзь.
1002 Сулаквелидзе, Конст. Аввакум., Рост. на Дону.
1003 Султанъ-Шахъ, Екат. Сем., С.-Петербургъ.
1004 Сумпшевскій, Сигизм. Степ., Бердичевъ.
1005 Суница, Левъ Борис., Москва.
1006 Супруненко, Над. Вас., Лубны, Полтав. губ.
1007 Сурина, Нина Мих., Кинешма.
1008 Суринъ, Левъ Самойл., Вильна.
1009 Сухарникова, Анна Мих., Москва.
1010 Сухинина, Елиз. Григ., Тула.
1011 Сухова, Надежда Андреев., Могилевъ, Каменецъ-Подольскъ.
1012 Сушковъ, Викт. Владим., Грозный, Терск. обл.
1013 Сырейщиковъ, Серг. Серг., Рославль, Смолен. г.
1014 Сысоевъ, Конст. Павл., Стар. Осколъ, Курск. губ.
1015 Сѣдлецкій, Конст. Ферд., Ахтырка, Харьк. губ
1016 Таганцева, Люб. Степ., нач. гимн., С.-Петербургъ.
1017 Толузакова, Пав. Павл., Пенза.
1018 Тарасовъ, Павелъ Петров., Томскъ.
1019 Тарновскій, Влад. Ник., Ростовъ-на-Дону.
1020 Татаркевичъ, Владисл. Іосиф., Ченстоховъ.
1021 *Таубе, бар., Мих. Фердинанд., инж. Пут. Сообщ., С.-Петербургъ.
1022 Твердинъ, Вас. Степанов., Бѣжецкъ, Твер. г.
1023 Теннеръ, Дм. Эд., С.-Петербургъ.
1024 Теодоровичъ, Ив. Григор., Москва.
1025 *Теръ-Степанянъ, Ив. Степ., инж. пут. сооб., С.-Петербургъ.
1026 Тизенгаузенъ, Бор. Михайл., Херсонъ.
1027 Тикиджи-Хамбуровъ, Іоак. Мануил., Нахичевань на-Дону.
1028 Тимашенко, Ив. Гавр., Екатеринодаръ.
1029 Тихомировъ, Вас. Ник., Александровъ, Влад. г.
1030 Тихомировъ, Ник. Веніамин., С.-Петербургъ.
1031 Тихонова, Елена Львовна, Ст. Лабинская, Куб. области.
1032 Тихоновъ, Ник. Иван., Харьковъ.
1033 Тихонравовъ, Дм. Алексѣев., Либава.
1034 Тобольякевичъ, Алекс. Иван., Сумы, Харьк. губ.
1035 Токаревъ, Влад. Влад., Новомосковскъ, Екат. г.
1036 Токмачевъ, Пав. Михайл.. Кронштадтъ.
1037 Толкичевъ, Ѳед. Максимил., инсп. 11-ой гимн., С.-Петербургъ.
1038 Толмачевъ, Алекс. Никол., Окр. Инсп., Царское Село.
1039 Толмачевъ, Серг. Ник., С.-Петербургъ.
1040 Тамамшева, Нина Артем., С.-Петербургъ.
1041 Томашевичъ, Евгеній Степ., Москва.

1042 Томилинъ, Ник. Аркад., С.-Петербургъ.
1043 Тонъ, Людв. Густав., Екатеринодаръ.
1044 Топоркова, Алекс. Григ., С.-Петербургъ.
1045 Тороповъ, Конст. Алекс., дир. реальн. уч., Оренбургъ.
1046 Точинскій, Люц. Ант., нач. техн. жел.-дор уч., Конотопъ, Черниг. губ.
1047 Травчетовъ, Ив. Матв., дир. хим. техн учил., С.-Петербургъ.
1048 Трапезникова, Вѣра Гавр., Бѣлозерскъ, Новг. г.
1049 Трескина, Алек. Алекс., Борисоглѣбскъ, Там. г.
1050 Трефнеръ, Конст. Вильг., Юрьевъ, Лиф. губ.
1051 Троицкій, Всев. Петр., Новгородъ.
1052 Троицкій, Ив. Вас., ст. Бологое, Никол. ж. д.
1053 Троицкая, Клавдія Петр., С.-Петербургъ.
1054 Трубинъ, Феликсъ Георг., Пермь.
1055 Тулодзецкій, Казим. Конст., Люблинъ.
1056 Туммерманъ, Абр. Михайл., Одесса.
1057 Туныцева, Над. Иван., Нижній-Новгородъ.
1058 Туранскій, Васил. Иван., Пермь.
1059 *Турыкина, Вѣра Матв., слуш. высш. жен. курс., С.-Петербургъ.
1060 Тюряковъ, Мих. Влад., Торжокъ, Твер. губ.
1061 Тяккина, Люб. Ник., С.-Петербургъ.
1062 Уманскій, Серг. Ив., Омскъ.
1063 Ульманъ, Над. Сем., С.-Петербургъ.
1064 Ураевскій, Влад. Мих., Саратовъ.
1065 Успенскій, В. М., Ст. Лабинская, Куб. обл.
1066 Устинова, Юлія Алекс., Пенза.
1067 Утке, Цезарій Юльев., Варшава.
1068 Ушаковъ, Ник. Серг., Балашовъ, Сарат. губ.
1069 Фанти, Валер. Констант., Конотопъ.
1070 Фармаковская, Антонина Сильвестр., Козловъ, Тамбов. губ.
1071 *Федорова, Ольга Ник., слуш. высш. жен. курс., С.-Петербургъ.
1072 Федоровъ, Илья Фед., Тверь.
1073 Федоровичъ, Стан. Франц., С.-Петербургъ.
1074 Федоровичъ, Софія Іосиф., С.-Петербургъ.
1075 Филяновичъ, Стан. Окт., Бугуруслапъ, Самар. губ.
1076 Ферингеръ, Анна Богд., С.-Петербургъ.
1077 Ферстеръ, Вл. Ив., Кѣльцы.
1078 Фесенко, Вал. Мих., Харьковъ,
1079 Филимоновъ, Ник. Вас., Выборгъ.
1080 Филипповичъ, Филиппъ Вас., С.-Петербургъ.
1081 Филипповъ, Алекс. Іосиф., Могилевъ-Подол.
1082 Филипповъ, Вл. Мих., С.-Петербургъ.
1083 Финкельштейнъ, Вл. Еф., зав. м. гимн., Ромны, Полт. губ.
1084 Флоровъ, Петръ Степ., дир. реал. уч., Урюпинская станица.
1085 Фокинъ, Ник. Мартын., Торжокъ, Твер. губ.
1086 Франкъ, Мих. Людв., С.-Петербургъ.
1087 Фурманъ, Рудольфъ Рудольф., С.-Петербургъ.
1088 Хабаровъ, Ив. Петр., окр. инс. Спб. окр., С.-Петербургъ.
1089 Ханакадопуло, Лаз. Дм. Одесса.
1090 Харикъ, Вл. Льв., Кишеневъ.
1091 Харченко, Ник. Өед., Ромны, Полт. губ.
1092 Херсонскій, Григ. Хрисанф., Самара.
1093 Хмѣлининъ, Пав. Пол., Пермь.
1094 Холкинъ, Влад. Никитичъ, Ново-Николаевскъ, Томск. губ.
1095 Хонина, Ел. Петр., Новороссійскъ, Черном. губ.
1096 Ходалицкій, Алекс. Ив., г. Александрополь, Эр. г.
1097 Холодовскій, Евг. Алекс., С.-Петербургъ.
1098 Хорватъ, Клим. Алекс., Казань.
1099 Хорошилова, Марія Георг., Кіевъ.
1100 Хоцевичъ, С. А., нач. ж. гимн., Новгородъ.
1101 Христіансенъ, Бор. Алекс., С.-Петербургъ.
1102 Хрущинскій, Мих. Игн., С.-Петербугъ.
1103 Худзинскій, Ник. Алекс., Рязань.
1104 Хухлинъ, Василій Серг., Поневѣжъ, Ковен. губ.
1105 Царда, Людмила Игнатьевна, Псковъ.
1106 Цвѣтаева, Люб. Гур., Кострома.
1107 Цвѣтковъ, Ив. Льв., С.-Петербургъ.
1108 Цегеръ, Ек. Вас., Екатеринославъ.
1109 Цинзерлингъ, Дм. Петр., С.-Петербургъ.
1110 *Цитронъ. Маркъ Льв., ред.-изд. «Сотрудникъ», С.-Петербургъ.

1111 Цубербиллеръ, Ольга Ник., Москва.
1112 Цытовичъ, Эр. Плат., дир. реальн. учил., Царское Село.
1113 Цыбущенко, Ольга Ив., Петрозаводскъ.
1114 Чайкина, Юл. Аф., С.-Петербургъ.
1115 Чачхіани, Бор. Конст., Ярославль.
1116 Чебышевъ-Дмитріевъ, Алексѣй Ал., С.-Петербургъ.
1117 Чемолосовъ, Серг. Степ., директ. реальн. учил. Хоролъ, Полт. губ.
1118 Чепиковъ, Өед. Мих., Кіевъ.
1119 Чепурный, Ник. Ив., Воронежъ.
1120 Черновъ, Мих. Яковл., Новый Бугъ, Херсон. г.
1121 Чернобровкинъ, Ив. Алекс., Кіевъ.
1122 Чернышевъ, Ник. Вас., С.-Петербургъ
1123 Челюсткинъ, Ив. Александр., Рига.
1124 Чемериновъ, Григ. Александр., Ковно.
1125 Чеснoковъ, Ник, Дм., Оренбургъ.
1126 Чефрановъ, Мих. Павл., Пирятинъ, Полт. губ.
1127 Чирхинъ, Дим. Паф., Алатырь, Симб. губ.
1128 Чистяковъ, Іосафъ Ив., Москва.
1129 Чистяковъ, Алекс. Ив., Тула.
1130 Чихановъ, Богд. Павл., дир. ком. уч., Минскъ.
1131 Чихладзе, Ев. Ив., Баку.
1132 Чичибабинъ, Ник. Ив. Елисаветградъ.
1133 *Чуркина, Варвара Ник., слуш. Спб. высш. жен. курс., С.-Петербургъ.
1134 Чупихина, Елиз. Никанор., Вятка.
1135 Чухаевъ, Лавр. Мих., Таганрогъ.
1136 Шабливскій, Вас. Семенов., Москва.
1137 Шапошниковъ, Николай Александр., проф. техн. учил., Москва.
1138 Шапошниковъ, Алекс. Ник., дир. комм. уч., Щелково, Сѣв. дор.
1139 Шарбе, Серг. Бак., Екатеринославъ.
1140 Шатировъ, Геор. Вас., С.-Петербургъ.
1141 Шатуновскій, Сам. Ос., прив. доц., Одесса.
1142 Шафранова, Юлія Семен., С.-Петербургъ.
1143 Шебедевъ, Вадимъ Дм., Екатеринодаръ, Куб. обл.
1144 Шевелевъ, Ник, Алекс., Томскъ.
1145 Шелянинъ, Илья Ив., инсп. торг. школ., Вологда.
1146 *Шеманская, Ел. Алекс., слуш. Бестуж. курс., С.-Петербургъ.
1147 Шемяновъ, Ник. Ник., Владиміръ на Клязьмѣ.
1148 Шенкманъ, Алекс. Тим., С.-Петербургъ.
1149 Шергинъ, Алекс. Мих., Екатеринославъ.
1150 Шестаковъ, Аркад. Яковл., Могилевъ-губерн.
1151 Шестаковъ, Леонидъ Ив., С.-Петербургъ.
1152 Шестовъ, Өед. Алекс., г. Орша, Могил. губ.
1153 Шидловскій, Влад. Іуліанов., ген. м., Витебскъ.
1154 Шикснисъ, М. Н., Рига.
1155 Шиффъ, Вѣра Іосиф., С.-Петербургъ.
1156 Шишкина, Ольга Ив., Москва.
1157 Шларбъ, Өеофилъ Өедор., Гатчина.
1158 Шлиссельмайеръ, Алекс. Ив., Сороки, Бесс. губ.
1159 Шмелевъ, Алекс. Ник., Анапа.
1160 Шохоръ-Троцкій, Сем. Ильичъ, С.-Петербургъ.
1161 Шмаровъ, Алекс. Алекс., С.-Петербургъ.
1162 *Шпилько, Ан. Алекс., студ. Горн. Инст., С.-Петербургъ.
1163 Шкотенко, Анд. Ив., Кишиневъ.
1164 Штейнъ, Елена Адольф., С.-Петербургъ.
1165 Штембергъ, Геор. Конст., дир. гим. реальн. уч., С.-Петербургъ.
1166 Шенбергъ, Сергѣй Павл., Кіевъ.
1167 Шенбергъ, Елиз. Конст. Кіевъ.
1168 Шимановскій, Леонидъ Иванов. г. Рѣчица, Минск. губ.
1169 Штернбергъ, Густавъ Густавов., инсп. учил. при Реформ. церкв., С.-Петербургъ.
1170 Штепенко, Мих. Зах., Екатеринодаръ.
1171 *Шульгина, Надежда Яковл., слуш. высш. жен. курс., С. Петербургъ.
1172 Шульцъ, Л. Я., Екатеринбургъ.
1173 Шумаковъ, Дм. Льв., С.-Петербургъ.
1174 Шумиловъ, Вас. Ив., Томскъ.
1175 Шумахеръ, Пав Алекс., инсп. Кишин. 2-й муж. г., Кишиневъ.
1176 Щеголева, Зин. Даніил., С.-Петербургъ.
1177 Щеголева, Марія Ив., С.-Петербургъ.
1178 Щербань, Ив. Евф., Екатеринославъ.
1179 Щербацевичъ, Марія Мокіевна, С.-Петербургъ.
1180 Щелковъ, Алексѣй Алексѣев., В.-Волочекъ.
1181 Щетковская, Лидія Мих., С.-Петербургъ.

1182 Щуцкій, Андрей Влад., Грозный, Терск. обл.
1183 Эверсъ, П. М., Ядринъ, Казан. губ.
1184 Эпштейнъ, Михаилъ Серг., Арзамасъ, Нижегор. г.
1185 Эренфестъ, Тат. Алексѣев., С.-Петербургъ.
1186 Эренфестъ, Павелъ Сигизмундов., С.-Петербургъ.
1187 Эрлеръ, Ник. Александр., С.-Петербургъ.
1188 Эрнъ, Ѳедоръ Александр., Рига.
1189 Юзбашевъ, Павелъ Артемьев., Ейскъ, Куб. обл.
1190 Юновичъ, Арнольдъ Монс., С.-Петербургъ.
1191 Юргенсъ, Евг. Алекс., Екатериносл. губ.
1192 Юргенсъ, Павелъ Христіан., Либава.
1193 Юргенсъ, Сераф. Вас., Екатериносл губ.
1194 Юргенсонъ, Рейнг. Георг., Пинскъ, Мин. губ.
1195 Юркевичъ, Ал. Авд., Георгіевскъ, Терской обл.
1196 Юсевичъ, Адріанъ Яковл., С.-Петербургъ.
1197 Яговтъ, Ив. Фердинандов., Рига.
1198 Яковлева, Ал. Конст., Саратовъ.
1199 Яковлева, Елиз. Мих., Дорогобужъ, Смол. губ.
1200 Яковлевъ, Павелъ Александр., Воронежъ.
1201 Яковлевъ, Петръ Дмитр., Александрія, Херсон. г.
1202 *Яковкинъ, Авен. Ал., приг. къ проф. вв., Казань.
1203 Янковичъ, Павелъ Адам., Вильна.
1204 Янковская, Ольга Петр., Славянскъ, Харьков. г.
1205 Янковскій, Петръ Станисл., С.-Петербургъ.
1206 Яновичъ, Анат. Иванов., С.-Петербургъ.
1207 Яновская, Елена Ив., м. Городище, Кіевской г.
1208 Ярославлевъ, Леон. Сем., С.-Петербургъ.
1209 Ярошенко, Ал. Арх., инсп. реальн. учил., Карсъ.
1210 Яськовъ, Аркад. Степ., Орелъ.
1211 Янжулъ, Екатерина Никол., членъ отд. Ученаго Ком. М. Н. Пр. по техн. и проф. образов., С.-Петербургъ.
1212 Янковичъ, Бор. Алексѣев., Ростовъ н/Д.
1213 Яфа, Ольга Виктор., С.-Петербургъ.
1214 Ѳаддеевъ, Серг. Ив., Саратовъ.
1215 Ѳедоровскій, Дм. Алексан., нач. техн. учил., Тула.
1216 Ѳивейская, Марія Михайловна, Москва.
1217 Ѳивейскій, Ник. Павлов., С.-Петербургъ.

Замѣченныя опечатки:

	Напечатано:	Слѣдуетъ читать:
Въ I-мъ томѣ:		
Стр. 27	положенія	наложенія
» 29	извѣстный порядокъ	извѣстный парадоксъ
» 44	отдѣльныхъ	остальныхъ
» 303	Нижегородскаго Математическо-астрономическаго кружка	Нижегор. Кружка любителей физики и астрономіи.
» 442	Къ моему курсу	къ этому сборнику
Во II-мъ томѣ:		
Стр. 55, внизу,	Бреля	Бореля
» 94, п. III,	предложнінія	предложенія
» 105,	естественной	естественной
» 109	Lionarbo	Leonardo
» 112	$2\sqrt[x-1]{x+1}$	$2^{\sqrt[x-1]{x+1}}$
» 117	Гора до	Гораздо

Книги по математикѣ, изданныя И. И. Горбуновымъ-Посадовымъ.

Е. ГОРБУНОВА и И. ЦУНЗЕРЪ.

Живыя числа, живыя мысли, руки за работой.

КНИГА ПЕРВАЯ.

Первые шаги маленькаго математика. Первый годъ обученія ариѳметикѣ въ школѣ и семьѣ, разработанный на основѣ дѣтской самодѣятельности, на опытѣ и наглядности со множествомъ рисунковъ. Цѣна 35 к.

Наглядныя таблицы умноженія, составленныя по методу, изложенному въ книгѣ: «Первый годъ обученія въ начальной школѣ» (см. 55 стр.). (9 таблицъ). Составлены Е. Я. Фортунатовой и Л. К. Шлегеръ. Въ картон. трубкѣ. Цѣна 1 р. 60 к.

Ариѳметика Л. Н. Толстого. Часть первая.—Цѣлыя числа. Часть вторая.—Дроби. Съ указаніями для руководителя о преподаваніи ариѳметики. Съ предисловіемъ П. Буланже—«о значеніи ариѳметики Л. Толстого» Цѣна 25 к.

Новая геометрія. Систематическій курсъ геометріи, изложенный согласно съ законами познанія. Общедоступное руководство для обученія и самообученія. Е. И. Попова. *Книга первая.* **Наглядная геометрія на плоскости** (интуитивная планиметрія) съ 513 рисунками и чертежами. Ц. 1 р. 20 к., въ папкѣ 1 р. 40 к.

Наглядная геометрія. Пособіе для обученія и самообученія геометріи Вильяма Кемпбеля. Съ 314 рисунк. и чертежами. Переводъ съ англійскаго Е. Попова. Цѣна 1 руб., въ папкѣ 1 р. 20 к., въ коленкор. переплетѣ 1 р. 40 к.

Какъ я училъ моего мальчика геометріи. Первые уроки геометріи для дѣтей. Л. Гурвича. Съ 214 рис. Цѣна 35 к., въ папкѣ 50 к.

Лэзанъ, К. Докторъ математическихъ наукъ, преподаватель Политехникума въ Парижѣ. Новые пути ознакомленія дѣтей съ математикой. Книга, посвященная друзьямъ дѣтства. Съ 98 рисунками. Цѣна 55 к., въ папкѣ 75 к.

Камескасъ, Ж. Какъ заниматься съ помощью ознакомителя съ математикой, набора складныхъ кубиковъ, дающаго возможность легко примѣнять на практикѣ принципы К. Лэзана. Съ 15 рис. Цѣна 15 коп., въ папкѣ 25 к.

Герлахъ, А. Какъ преподавать дѣтямъ ариѳметику въ духѣ творческаго воспитанія Съ нѣмецкаго О. Забѣлло. Выпускъ 1-й. Цѣна 35 к.

Продаются въ отдѣленіи склада издательства «ПОСРЕДНИКЪ» (С.-Петербургъ, Невскій, 84, кв. 89), въ книжномъ магазинѣ «ПОСРЕДНИКЪ» (Москва, Петровская линія), въ другихъ книжныхъ магазинахъ и земскихъ книжныхъ складахъ. Выписывать изъ главнаго склада издательства. Москва, Арбатъ, домъ 36. И. И. Горбунову.

Отсюда же высылается безплатно полный каталогъ издательства.